最近の入試問題から

東京都立戸山高等学校

2021 年 9 月 18 日 (土)

目 次

1 素数 **1**

2 とりうる値の範囲 **2**

3 オイラー線 **3**

4 点と平面の距離 **4**

5 シムソン線 **5**

6 媒介変数表示の作成 **6**

7 解答例 **7**

8 追記　シムソンの定理 **32**

1　素数

1　n を 2 以上の整数とする．$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ．

(21 京都大 理 6(1))

参考問題

【1 − 1】p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ．

(21 京都大 文 5)

【1 − 2】以下の問いに答えよ．

(1) $k^2 + 2$ が素数となるような素数 k をすべてみつけよ．また，それ以外にないことを示せ．

(2) 整数 l が 5 で割り切れないとき，$l^4 - 1$ が 5 で割り切れることを示せ．

(3) $m^4 + 4$ が素数となるような素数 m は存在しないことを示せ．

(21 お茶の水女大 理・文教・生科 1)

【1 − 3】以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n,\ k$ が $2 \leqq k \leqq n - 2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ．

(2) p を素数とする．$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ．

(21 九州大 理系 5)

2　とりうる値の範囲

2 $a,\ b$ を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．
(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(21 東京大 理 1 文 3)

参考問題

【2 − 1】a を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2 + (a+1)x + a^2 - 1 = 0$ について，以下の問に答えよ．

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．
(2) a を (1) で求めた範囲で動かすとき，この 2 次方程式の実数解がとりうる値の範囲を求めよ．

(21 神戸大 後 理系 4)

【2 − 2】実数 a が $0 \leqq a \leqq 1$ を満たしながら動くとき，座標平面において 3 次関数 $y = x^3 - 2ax + a^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフが通過する領域を A とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 $x = \dfrac{1}{2}$ と A との共通部分に属する点の y 座標のとり得る範囲を求めよ．
(2) A に属する点の y 座標の最小値を求めよ．
(3) A の面積を求めよ．

(21 早稲田大 教育 3)

3　オイラー線

3　xy 平面において，2 点 $\mathrm{B}\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$，$\mathrm{C}\left(\sqrt{3},\ -1\right)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする．

$(*)$　$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正．

次の各問に答えよ．

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心の座標を求めよ．

(2) 点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心の軌跡を求めよ．

(21 京都大 理 5)

参考問題

【3 − 1】$\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\mathrm{OA} = 5,\ \mathrm{OB} = 4,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \sqrt{21}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ とおく．$\triangle\mathrm{OAB}$ の外心を P，垂心を H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{a} + \boxed{\text{イ}}\,\overrightarrow{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{a} + \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{b}$$

と表すことができる．

また，線分 PH を $1:2$ に内分する点 D について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{a} + \boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{b}$$

と表せることから，点 D は $\triangle\mathrm{OAB}$ の $\boxed{\text{キ}}$ である．

(21 関西医大 1(1))

【3 − 2】三角形 ABC の外接円の中心を D とし，点 E は $\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を満たすとする．また，頂点 A と辺 BC の中点を通る直線が頂点 B と辺 CA の中点を通る直線と交わる点を F とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}} = \overrightarrow{0}$ が成り立つことを示せ．

(2) 直線 AE は直線 BC と垂直に交わることを示せ．

(3) 点 E と点 F が異なるとき，線分の長さの比 $\mathrm{DF} : \mathrm{EF}$ を求めよ．

(4) 点 E と点 F が等しいとき，辺の長さの比 $\mathrm{AB} : \mathrm{AC}$ を求めよ．

(21 大阪府大 現シス・地保 3)

4　点と平面の距離

4　座標空間において，3 点 A(6, 6, 3)，B(4, 0, 6)，C(0, 6, 6) を通る平面を α とする．以下の問いに答えよ．

(1) α に垂直で大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ．

(2) 中心が点 P$(a,\ b,\ c)$ で半径が r の球が平面 α，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてに接し，かつ $a \geqq 0,\ b \geqq 0$ が満たされている．このような点 P と r の組をすべて求めよ．

(21 東北大 後 理 6)

参考問題

【4 − 1】座標空間に 3 点 A$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$，B$\left(0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)$，C$\left(0,\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$ があり，3 点 A，B，C を通る平面に垂直なベクトルの 1 つを求めると $\overrightarrow{n} = \left(1,\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ である．原点 O(0, 0, 0) とこの平面の距離は $\boxed{\text{サ}}$ である．また，実数 α に対して座標が $(\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha)$ である点を D とし，原点 O に関する位置ベクトルが $2\overrightarrow{n}$ となる点を E とする．原点 O と点 E が点 D を中心とする球面上にあるとき，$\alpha = \boxed{\text{シ}}$ である．

(21 山梨大 後 医 1(5))

5　シムソン線

5 複素数平面上において，単位円上に異なる 3 点 A，B，C がある．3 直線 BC, CA, AB のいずれの上にもない点 $\mathrm{P}(w)$ を考える．P から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を，それぞれ A', B', C' とする．ここで，単位円とは原点を中心とする半径 1 の円のことである．また，点 P から直線 l に下ろした垂線の足とは，P を通り l に垂直な直線と l の交点のことである．

(1) $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とするとき，直線 AB 上の点 z は

$$z + \alpha\beta\overline{z} = \alpha + \beta$$

を満たすことを示せ．

(2) $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}'(\gamma')$ とするとき，

$$2\gamma' = \alpha + \beta + w - \alpha\beta\overline{w}$$

を示せ．

(3) A', B', C' が一直線上にあるとき，P は単位円上にあることを示せ．

(21 滋賀医大 医 3)

参考問題

【5 – 1】複素数平面において，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とし，原点 O を通る円を S とする．S 上に O 以外の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$，$\mathrm{C}(c)$ をとる．A と B を通る直線を l_1，B と C を通る直線を l_2，C と A を通る直線を l_3 とし，点 O から l_1, l_2, l_3 に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{D}(d)$，$\mathrm{E}(e)$，$\mathrm{F}(f)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Q}(2ab)$ ととる．3 点 O，A，Q および 3 点 O，B，Q がそれぞれ一直線上にないとき，△OAQ と △OBQ は二等辺三角形であることを示せ．

(2) 複素数 d, e, f を a, b, c を用いて表せ．

(3) 3 点 D, E, F は同一直線上にあり，点 O からその直線に下ろした垂線の足を表す複素数は abc であることを示せ．

(18 埼玉大 理 (数)2)

6　媒介変数表示の作成

6　平面上で 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の頂点 A, B, C を中心とする半径 1 の円で囲まれた部分をそれぞれ D_1, D_2, D_3 とする．D_1, D_2, D_3 の共通部分を K とする．すなわち K は，共通部分に含まれる弧 AB，弧 BC，弧 CA で囲まれた図形である．

xy 平面上に K を考え，点 A は原点に，点 C は y 軸上に，点 B は第 1 象限に属するように K をおく．この K が x 軸の上で正の方向にすべることなく転がり，1 回転するときにできる点 A の描く曲線を L とする．

(1) K の弧 AB と x 軸が共有点をもつとき，その共有点を P とし，$\angle\mathrm{ACP} = \theta$ とおく．ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ とする．このとき点 A の座標を θ を用いて表せ．

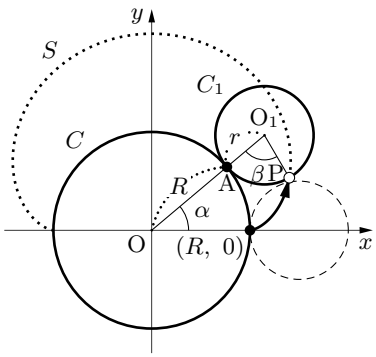
(2) K が 1 回転したあとの点 A の座標を求めよ．

(3) 曲線 L と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(21 京都府医大 4B)

参考問題

【6 − 1】xy 平面の原点 O を中心とする半径 R の円 C と，これに外接する半径 r の円 C_1 がある．ただし，$R \leqq 2r$ とする．円 C_1 は円 C に外接しながら反時計まわりにすべることなく回転し，その接点を点 A とする．円 C_1 の中心を $\mathrm{O_1}$ とし，右図のように，直線 $\mathrm{OO_1}$ と x 軸の正の向きとのなす角を α, 円 C_1 の弧 AP に対する中心角を β とする．α が 0 から π まで変化するとき，円 C_1 の周上に固定された点 P の軌跡を S とする．ただし，$\alpha = 0$ のときに点 P は点 $(R,\ 0)$ の位置にあるものとする．



以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ であるときの点 $\mathrm{O_1}$ の座標 $(x,\ y)$ を $R,\ r,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) $\alpha = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ であるときの β を $R,\ r,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) $\alpha = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ であるときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を $R,\ r,\ \theta$ を用いて表せ．

(4) $R = 2r$ とする．このとき，軌跡 S の長さ L を r を用いて表せ．ただし，曲線 $x = f(\theta),\ y = g(\theta)$ $(\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2)$ の長さ L_0 は，

$$L_0 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

と表すとができる．

(21 豊橋技科大 2)

7　解答例

1

対偶を示す．2 以上の整数 n について，n が素数ではない仮定とすると

$$n = pq \quad (p,\ q \text{ は 2 以上の自然数})$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned} 3^n - 2^n &= 3^{pq} - 2^{pq} \\ &= (3^p - 2^p)\{(3^p)^{q-1} + (3^p)^{q-2} \cdot 2^p + \cdots + (2^p)^{q-1}\} \end{aligned}$$

である．ここでの各因数は $p \geqq 2,\ q \geqq 2$ より

$$3^p - 2^p = (3-2)(3^{p-1} + 3^{p-2} \cdot 2 + \cdots + 2^{p-1}) \geqq 1 \cdot (3+2) = 5$$

$$(3^p)^{q-1} + (3^p)^{q-2} \cdot 2^p + \cdots + (2^p)^{q-1} \geqq 3^2 + 2^2 = 13$$

であり，ともに 1 でない正の整数である．すなわち，$3^n - 2^n$ は合成数であり，素数ではない．

したがって，$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数である．　　……(証明終わり)

【1 − 1】$f(p) = p^4 + 14$ とおく．p に素数を順次代入していく．

$$f(2) = 16 + 14 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad \therefore \quad f(2) \text{ は素数でない．}$$

$$f(3) = 81 + 14 = 95 = 5 \cdot 19 \qquad \therefore \quad f(3) \text{ は素数でない．}$$

$p > 3$ のとき，p は素数なので，$p(> 3)$ を 3 で割った余りは 1 か 2 であり，

$$p \equiv \pm 1 \pmod 3$$

であるから

$$\begin{aligned} f(p) &\equiv (\pm 1)^4 + 14 \pmod 3 \\ &= 15 \\ &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

である．すなわち，$f(p)$ は 3 の倍数であり，素数でない．

以上より，p が素数ならば $f(p)$ は素数でないことは示された．　　……(証明終わり)

- $p = 3$，$p \neq 3$ で場合分けしてもよい．

【1 − 2】

(1) 求める素数 k は，$k = 3$ のみである．なぜならば

$k = 3$ のとき，$3^2 + 2 = 11$ は素数であり，条件を満たす．

k が 3 以外の素数のとき，k を 3 で割った余りは 1 または 2 であるから

$$k \equiv \pm 1 \pmod 3$$

であり

$$k^2 + 2 \equiv (\pm 1)^2 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$$

である．すなわち，$k^2 + 2$ は 3 の倍数であり，素数ではない．

よって，$k^2 + 2$ が素数となるような素数 k は 3 のみである．　　……(証明終わり)

(2) 整数 l が 5 で割れないとき，整数 l を 5 で割った余りは 1, 2, 3, 4 のいずれかであり

$$l \equiv \pm 1 \text{ または } \pm 2 \pmod 5$$

のいずれかである．

(i) $l \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき

$$l^4 - 1 \equiv (\pm 1)^4 - 1 = 0 \pmod 5$$

(ii) $l \equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき

$$l^4 - 1 \equiv (\pm 2)^4 - 1 = 15 \equiv 0 \pmod 5$$

以上 (i)，(ii) より，$l^4 - 1$ は 5 で割り切れる． …… (証明終わり)

- $l^4 - 1$ を変形すると

$$\begin{aligned} l^4 - 1 &= (l^2 - 1)(l^2 + 1) \\ &= (l-1)(l+1)(l^2 - 4 + 5) \\ &= (l-1)(l+1)\{(l-2)(l+2) + 5\} \\ &= (l-1)(l+1)(l-2)(l+2) + 5(l-1)(l+1) \end{aligned}$$

となる．

連続した 5 つの整数 $l-2,\ l-1,\ l,\ l+1,\ l+2$ の中に 5 の倍数は 1 つ存在するが，l は 5 の倍数でないので，$l-2,\ l-1,\ l+1,\ l+2$ の中の 1 つが 5 の倍数である．したがって，積 $(l-1)(l+1)(l-2)(l+2)$ は 5 の倍数である．また，$5(l-1)(l+1)$ も 5 の倍数であるから，$l^4 - 1$ は 5 で割り切れる．

(3) (2) の利用を考える．

素数 m が 5 で割り切れないとき，(2) より $m^4 - 1 = 5n$ (n は自然数) を表すことができる．このとき

$$m^4 + 4 = (5n + 1) + 4 = 5(n + 1)$$

$n + 1 \geqq 2$ であり，$m^4 + 4$ は素数ではない．

$m = 5$ のとき

$$m^4 + 4 = 5^4 + 4 = 629 = 17 \cdot 37$$

であるから，これは素数ではない．

よって，$m^4 + 4$ が素数となるような素数 m は存在しない． …… (証明終わり)

- 背理法を用いる．

$m^4 + 4$ が素数となるような素数 m が存在すると仮定すると，$m \geqq 2$ である．$m^4 + 4$ を因数分解すると

$$m^4 + 4 = (m^2 + 2)^2 - 2 \cdot 2m^2 = (m^2 - 2m + 2)(m^2 + 2m + 2)$$

であり

$$m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 \geqq (2-1)^2 + 1 = 2$$
$$m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 \geqq (2+1)^2 + 1 = 10$$

である．これは $m^4 + 4$ が 2 以上の自然数の積であるということであり，$m^4 + 4$ が素数であることに反する．

よって，$m^4 + 4$ が素数となるような素数 m は存在しない．

【1 − 3】

(1) $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき，$n \geqq k+2$ であるから

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots\cdot 2\cdot 1} \\
&= n\cdot\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{2} \\
&\geqq n\cdot\frac{(k+2)-1}{k}\cdot\frac{(k+2)-2}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{(k+2)-k+1}{2} \\
&= n\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2} \\
&> n
\end{aligned}
$$

よって，${}_n\mathrm{C}_k > n$ である． ……(証明終わり)

(2) ${}_n\mathrm{C}_k = p$ (p は素数) …… ①

(i) $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき，(1) と①より

$$p > n$$

である．一方

$$p = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots\cdot 2\cdot 1}$$

$$\therefore\quad p\cdot k(k-1)\cdots\cdot 2\cdot 1 = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

左辺は p の倍数でから，右辺も p の倍数であり，p は素数であるから，$n,\ n-1,\ \cdots,\ n-k+1$ の少なくとも 1 個は p の倍数であるが，これは $p > n$ に反する．よって，① は成り立たない．

(ii) $k=1$ のとき，①は

$${}_n\mathrm{C}_1 = p \qquad \therefore\quad n = p$$

(iii) $k=n$ のとき，①は

$${}_n\mathrm{C}_n = p \qquad \therefore\quad 1 = p$$

これは p が素数であることに反する．

(iv) $k=n-1$ のとき ①は

$${}_n\mathrm{C}_{n-1} = p \qquad \therefore\quad n = p$$

以上，(i)〜(iv) より ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となる自然数の組 $(n,\ k)$ は

$$\boldsymbol{(n,\ k) = (p,\ 1),\ (p,\ p-1)}$$ ……(答)

である．

2

$$C : y = x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y = -x^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①と②を連立すると

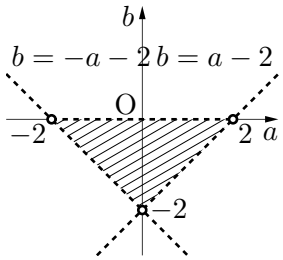
$$x^2 + ax + b = -x^2$$

$$\therefore \quad 2x^2 + ax + b = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

であり，$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおくと，①と②が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ において共有点をもつための条件は

$$\begin{cases} f(-1) = 2 - a + b > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = 2 + a + b > 0 \end{cases}$$

$$\iff (*) \begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$



よって，点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲は**右図の斜線部分**である．境界線，白丸は含まない．　……(答)

(2) 放物線 C の通りうる範囲は「①かつ $(*)$」を満たす実数 $a,\ b$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$① \iff b = -xa + y - x^2$$

であり，これは ab 平面においては，傾き $-x$，b 切片 $y - x^2$ の直線である．$g(a) = -xa + y - x^2$ とおくと

(i) $y - x^2 \leqq -2$ つまり $y \leqq x^2 - 2$ のとき

$$g(-2) > 0 \text{ または } g(2) > 0$$

$$\iff 2x + y - x^2 > 0 \text{ または } -2x + y - x^2 > 0$$

$$\therefore \quad y > x^2 - 2x \text{ または } y > x^2 + 2x$$

(ii) $-2 < y - x^2 < 0$ つまり $x^2 - 2 < y < x^2$ のとき

$-x$ は任意，すなわち x は任意

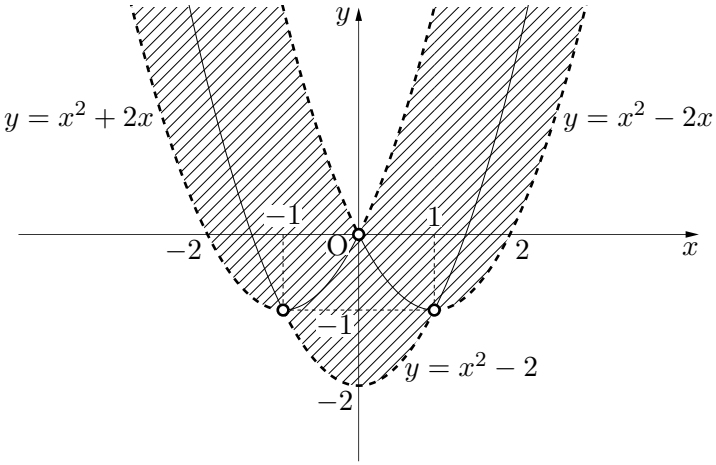
(iii) $y - x^2 \geqq 0$ つまり $y \geqq x^2$ のとき

$$g(-2) < 0 \text{ または } g(2) < 0$$

$$\iff 2x + y - x^2 < 0 \text{ または } -2x + y - x^2 < 0$$

$$\therefore \quad y < x^2 - 2x \text{ または } y < x^2 + 2x$$

以上 (i)〜(iii) まとめて，放物線 C の通りうる範囲は下図の網掛け部分である．ただし，境界線，白丸は含まない．



- (2) の条件として，ab 平面における直線 $b = g(a)$ の b 切片で場合分けしたが，傾き $-x$ に着目してもよいし，正領域・負領域に着目してもよい．

(I) 傾き $-x$ に着目する．

(i) $-x \leqq -1$ $(x \geqq 1)$ のとき

$$\begin{cases} g(-2) > 0 \\ g(2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - x^2 + 2x > 0 \\ y - x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

(ii) $-1 \leqq -x \leqq 1$ $(-1 \leqq x \geqq 1)$ のとき

$$\begin{cases} g(0) > -2 \\ g(-2) < 0 \text{ または } g(2) < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - x^2 > -2 \\ 「y - x^2 + 2x < 0 \text{ または } y - x^2 - 2x < 0」 \end{cases}$$

(iii) $1 \leqq -x$ $(x \leqq -1)$ のとき

$$\begin{cases} g(-2) < 0 \\ g(2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - x^2 + 2x < 0 \\ y - x^2 - 2x > 0 \end{cases}$$

以上 (i)〜(iii) を図示する．

(II) 正領域・負領域の利用する．

$h(a,\ b) = xa + b + x^2 - y$ とおき，(1) の三角形の辺と直線 $h(a,\ b) = 0$ が共有点をもつ条件 (端点における $h(a,\ b)$ の符号が異なる) をおさえると

$$\begin{aligned} &「h(-2,\ 0) \cdot h(0,\ -2) < 0 \\ &\quad \text{または } h(0,\ -2) \cdot h(2,\ 0) < 0 \\ &\quad \text{または } h(2,\ 0) \cdot h(-2,\ 0) < 0」 \\ \iff &「(-2x + x^2 - y)(-2 + x^2 - y) < 0 \\ &\quad \text{または } (-2 + x^2 - y)(2x + x^2 - y) < 0 \\ &\quad \text{または } (2x + x^2 - y)(-2x + x^2 - y) < 0」 \end{aligned}$$

以上 (i)〜(iii) を図示する．

【2 − 1】 $x^2+(a+1)x+a^2-1=0 \quad \cdots\cdots (*)$

(1) x の 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，判別式を D_x とおくと，$D_x>0$ である．

$$D_x=(a+1)^2-4(a^2-1)=-3a^2+2a+5=-(a+1)(3a-5)$$

であるから，求める条件は

$$\boldsymbol{-1<a<\frac{5}{3}} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) a が範囲 ① を動くときの $(*)$ の実数解 x のとりうる値の範囲は，$(*)$ を満たす a が範囲 ① に存在するような x の値の集合である．

$(*)$ を a について整理すると

$$(*) \iff a^2+xa+x^2+x-1=0$$

$f(a)=a^2+xa+x^2+x-1$ とおき，$f(a)=0$ が範囲 ① に少なくとも一つ解をもつための x の条件を求める．

$f(a)=0$ の判別式を D_a とおくと

$$D_a=x^2-4(x^2+x-1)=-3x^2-4x+4=-(x+2)(3x-2)$$

であるから，$f(a)=0$ が実数解をもつための条件 $D_a \geqq 0$ は

$$-2 \leqq x \leqq \frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

である．② のとき，$y=f(a)$ の軸 $a=-\dfrac{x}{2}$ は

$$-\frac{1}{2}\cdot(-2) \geqq -\frac{x}{2} \geqq -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \qquad \therefore \quad -\frac{1}{3} \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1$$

軸は ① の範囲にある．また，端点の符号については

$$f(-1)=x^2 \geqq 0$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 \geqq 0$$

$f(-1)$，$f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ が同時に 0 となることはないから，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ の少なくとも一方は正であり，$f(a)=0$ を満たす a が範囲 ① に少なくとも一つ存在する．

よって，x のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

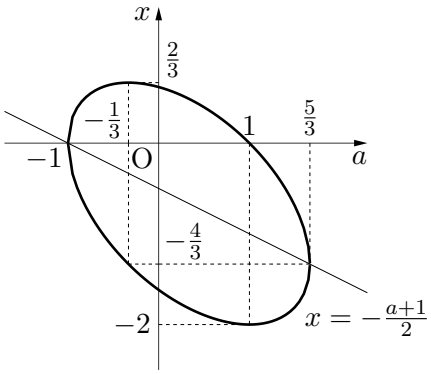
である．

● ax 平面上で

$$x^2+(a+1)x+a^2-1\ =0$$

を満たす点 $(a,\ x)$ の集合は右の太線となる．

(1)，(2) の範囲はこの図から読み取ることができる．



【2 − 2】 $y=x^3-2ax+a^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ …… ①

(1) ① に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

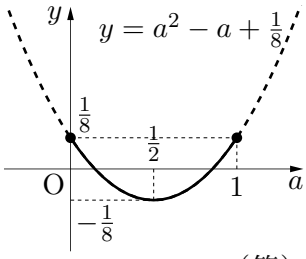
$$y=a^2-a+\frac{1}{8}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$$

a は $0\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くから，このときの y のとり得る範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{8}\leqq y\leqq\frac{1}{8}}$$

……(答)

である．



(2) x を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で固定し

$$f(a)=a^2-2xa+x^3\quad(0\leqq a\leqq 1)$$

とおく．

$$f(a)=(a-x)^2+x^3-x^2$$

であり，a は $0\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くから，$f(a)$ は $a=x$ のとき の最小値 x^3-x^2 をとる．

ついで，x を動かす．

$g(x)=x^3-x^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ とおくと

$$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$$

$g(x)$ は右のように増減し，$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$-\frac{4}{27}$	↗	

$$\boldsymbol{-\frac{4}{27}}$$

……(答)

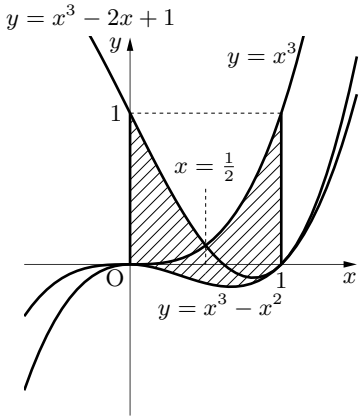
をとる．

(3) x を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で固定したときの y の動く範囲は

$$\begin{cases} f(x) \leqq y \leqq f(1) & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ f(x) \leqq y \leqq f(0) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - x^2 \leqq y \leqq x^3 - 2x + 1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ x^3 - x^2 \leqq y \leqq x^3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

x を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で動かすことにより，領域 A が得られ，それは右図の斜線部部となる．境界も含む．



この面積は

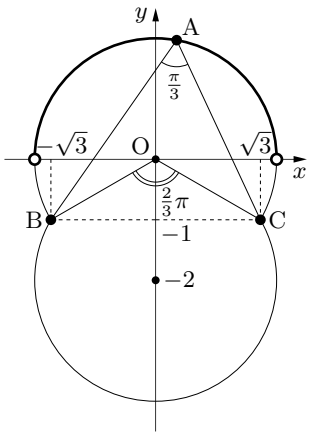
$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} \{(x^3 - 2x + 1) - (x^3 - x^2)\}\, dx \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{x^3 - (x^3 - x^2)\}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\, dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8} + 1\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{12}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

3

(1) $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ より，点 A は BC を弦とする円周上を動き，かつ，A の y 座標が正であることより，右図の太線部分を動く．



△ABC の外心を D とおくと，D は BC の垂直二等分線 (y 軸) 上にあり

$$\angle\mathrm{BDC} = 2\angle\mathrm{BAC} = \frac{2}{3}\pi$$

である．ここで，$\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，D は O と一致する．

よって，△ABC の外心の座標は

$$\boldsymbol{(0,\ 0)}$$

……(答)

である．

- D$(0,\ d)$ とおくことができ，△ABC の外接円の半径 R は正弦定理より

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

であるから，DB $= 2$ であり

$$(\sqrt{3})^2 + (d+1)^2 = 2^2 \qquad \therefore\quad d = -1 \pm 1$$

A の y 座標は正であるから $d = 0$ であり，外心 D の座標は $(0,\ 0)$ である．

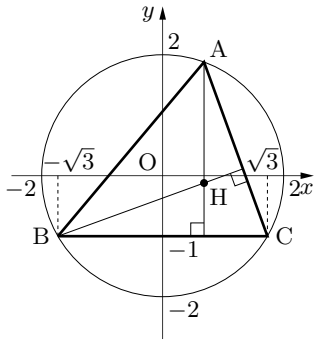
(2) (1) から，点 A は中心 $(0,\ 0)$，半径 OB $= 2$ の円の $y > 0$ の部分を動くから

$$\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

とおくことができ，△ABC の垂心 H の座標は

$$\mathrm{H}(2\cos\theta,\ y)$$

と表せる．このとき $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$ …… $(*)$ である．



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\
&= \begin{pmatrix} 2\cos\theta + \sqrt{3} \\ y+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\cos\theta - \sqrt{3} \\ 2\sin\theta + 1 \end{pmatrix}\\
&= 4\cos^2\theta - 3 + (y+1)(2\sin\theta + 1)\\
&= 1 - 4\sin^2\theta + (y+1)(2\sin\theta+1)\\
&= (1 + 2\sin\theta)(y + 2 - 2\sin\theta)
\end{aligned}$$

$1 + 2\sin\theta \neq 0$ より

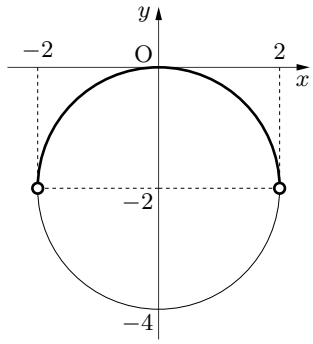
$$(*) \iff y + 2 - 2\sin\theta = 0$$

$$\therefore\quad y = 2\sin\theta - 2$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$0 < \theta < \pi$ より，垂心 H の軌跡は，中心 $(0,\ -2)$，半径 2 の上半円，すなわち



円 $x^2 + (y+2)^2 = 4$ の $y > -2$ の部分 ……(答)

である．図示すると右図の太線部分である．白丸は除く．

- 求める軌跡は ㋐ $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta - 2 \\ 0 < \theta < \pi \end{cases}$ を満たす θ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合

であり

$$㋐ \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{2} + 1 \\ 0 < \sin\theta < \pi \end{cases}$$

であるから，求める軌跡は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}+1\right)^2 = 1 \\ \dfrac{y}{2}+1 > 0 \end{cases}$$

すなわち

円 $x^2+(y+2)^2=4$ の $y>-2$ の部分

である．

- 外心 O，重心 G，垂心 H は一直線上 (オイラー線いう) に並び，OG : GH $=1:2$ であることが知られている．すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

という関係が成り立つ．これを用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta - 2 \end{pmatrix}$$

である．後は解答と同じ．

これを答案として使うときは，H が垂心であることを示してから使う．すなわち，次のような一文を付け加えて使う．

「$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 H を考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 2^2 - 2^2 = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 2^2 - 2^2 = 0$$

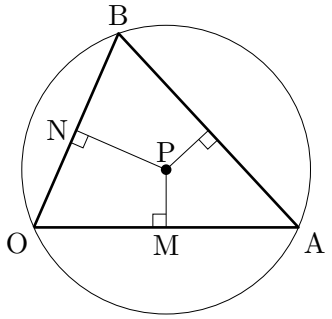
であり，H は △ABC の垂心である.」

【3 − 1】OA $=5$, OB $=4$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \sqrt{21}$ より

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 21$$
$$4^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 5^2 = 21$$
$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 10$$

外心 P について：

辺 OA，OB の中点をそれぞれ M，N とおく．P は，線分 OA，OB の垂直二等分線の交点であるか



ら，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{MP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{NP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{a} = 0 \\ \left(p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 25p + 10q - \dfrac{25}{2} = 0 \\ 10p + 16q - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5p + 2q = \dfrac{5}{2} \\ 5p + 8q = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad p = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{1}{4}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cos\angle\mathrm{AOP} \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{の}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{への正射影ベクトル}| \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}| \end{aligned}$$

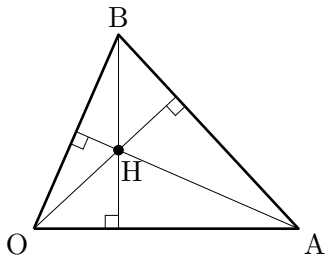
とみて

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}| \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{ON}}| \end{cases} \iff \begin{cases} \left(p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = 5 \times \dfrac{5}{2} \\ \left(p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = 4 \times \dfrac{4}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 25p + 10q = \dfrac{25}{2} \\ 10p + 16q = 8 \end{cases}$$

としてもよい．

垂心 H について：



$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x + 16y - 10 = 0 \\ 25x + 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 8y = 5 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{2}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルと一致し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影ベクトルと一致するから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{cases} \iff \begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ (x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 25x + 10y = 10 \\ 10x + 16y = 10 \end{cases}$$

としてもよい．

また，線分 PH を 1 : 2 に内分する点 D は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OH}}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\right\} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \end{aligned}$$

であり，点 D は △OAB の **重心** である． ……(答)

- △OAB において重心は外心 P，垂心 H を結ぶ直線 (オイラー線) 上にあり，線分 PH を 1 : 2 に内分する．この事実を知っていれば，本問の D は重心であり，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は直ちに埋まる．空欄 $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ については

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = 3\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PO}}}{3}$$

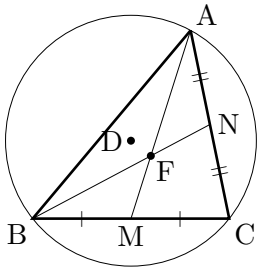
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-2\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a}+\frac{1}{4}\overrightarrow{b}\right)\\&=\frac{1}{5}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

とすることができる．

【3 − 2】

(1) 辺 BC，辺 CA の中点を，それぞれ M，N とする．F は中線 AM，BN の交点であるから，△ABC の重心である．重心の公式より



$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\overrightarrow{\mathrm{BF}}-\overrightarrow{\mathrm{CF}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{0}\qquad\cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

- 「〜が成り立つことを示せ.」とあることから,「公式により〜」はよくないと解釈すると，F が △ABC の重心であること，あるいは AF : FM = 2 : 1 なども使わずに，2 直線の交点として F をとらえることになる．すなわち，F が 2 直線の交点であることから，2 通りの表現をつくり，1 次独立性を利用することになる．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を示す.

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}\qquad\cdots\cdots ①$$

より，始点を D にとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{DE}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2\\&=0\quad(\because\ \text{D は △ABC の外心より，}|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|)\end{aligned}$$

直線 AE が存在しているので，A ≠ E であり，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\neq\overrightarrow{0}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\overrightarrow{0}$ でもから

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

すなわち，直線 AE は直線 BC と垂直に交わる．　　……(証明終わり)

- 同じく，① を満たす E に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0,\quad\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

が成り立つ．すなわち，E は △ABC の垂心である．

(3) ① の左辺について，始点を F にとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= (\overrightarrow{\mathrm{FA}} - \overrightarrow{\mathrm{FD}}) + (\overrightarrow{\mathrm{FB}} - \overrightarrow{\mathrm{FD}}) + (\overrightarrow{\mathrm{FC}} - \overrightarrow{\mathrm{FD}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}}) - 3\overrightarrow{\mathrm{FD}} \\ &= -(\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}}) + 3\overrightarrow{\mathrm{DF}} \\ &= 3\overrightarrow{\mathrm{DF}} \quad (\because\ (1)) \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，E と F が異なるとき，D, F, E はこの順に一直線上に並び

$$\mathrm{DF} : \mathrm{EF} = 1 : (3-1) = \mathbf{1 : 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) AF は BC の中点 M を通り，(2) より AE は BC と垂直であるから，E と F が等しいとき，AF(AE) は BC の垂直二等分線である．

したがって，AB = AC であり

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathbf{1 : 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- E と F が等しいとき，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = 3\overrightarrow{\mathrm{DF}} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{0} \qquad \therefore \quad \mathrm{D} = \mathrm{F}$$

外心 D と重心 F が一致するから，△ABC は正三角形であり

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : 1$$

である．

- 本問の △ABC において，D は外心，F は重心，E は垂心である．これらは一直線上に並び DF : EF = 1 : 2 が成り立つことはよく知られた事実である．この直線はオイラー線と呼ばれている．

4

(1) 求めるベクトルを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$ とおく．$\overrightarrow{n}$ は $|\overrightarrow{n}| = 1$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ のいずれにも垂直であるから

$$\begin{cases} |\overrightarrow{n}| = 1 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} k^2 + l^2 + m^2 = 1 \\ -2k - 6l + 3m = 0 \\ -6k + 3m = 0 \end{cases}$$

である．式を整理すると

$$m = 2k, \quad l = \frac{2}{3}k$$

であり

$$k^2+\left(\frac{2}{3}k\right)^2+(2k)^2=1 \qquad \therefore \quad k^2=\frac{9}{49} \qquad \therefore \quad k=\pm\frac{3}{7}$$

である．よって，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{n}=\pm\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルとして $\begin{pmatrix}3\\y\\6\end{pmatrix}$ をとることができる．さらに，これが $\begin{pmatrix}-2\\-6\\3\end{pmatrix}$ と垂直となる条件は

$$\begin{pmatrix}3\\y\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-6\\3\end{pmatrix}=0 \qquad \therefore \quad -6-6y+18=0 \qquad \therefore \quad y=2$$

求めるベクトルは $\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ と平行で大きさが 1 のベクトルであるから

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$$

である．

(2) 半径 r の球は各座標平面に接して，その中心 P が $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の範囲にあるので，P の座標は

$$(r,\ r,\ r) \text{ または } (r,\ r,\ -r)$$

である．

球と平面 α の接点を H とおくと

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$$

を満たし，$|\overrightarrow{n}|=1$ より，H は

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+r\overrightarrow{n} \text{ または } \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-r\overrightarrow{n}$$

と表すことができる．

$$n\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\pm r\overrightarrow{n})=0$$

$$|n\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(i) $\mathrm{P}(r,\ r,\ r)$ のとき

$$|n\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{1}{7}|3(r-6)+2(r-6)+6(r-3)|=\frac{1}{7}|11r-48|$$

であるから

$$(*) \iff |11r-48|=7r$$

$$\therefore \quad r=12,\ \frac{8}{3}$$

(ii) $\mathrm{P}(r,\ r,\ -r)$ のとき

$$|n\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{1}{7}|3(r-6)+2(r-6)+6(-r-3)|=\frac{1}{7}|-r-48|$$

であるから

$$(*)\iff |r+48|=7r$$

$$\therefore\quad r=8,\ -6\ (r>0\text{ に反する})$$

(i)，(ii) より，点 P と r の組は

$$\mathbf{\{P(12,\ 12,\ 12),\ r=12\},\ \left\{P\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right),\ r=\frac{8}{3}\right\},}$$

$$\mathbf{\{P(8,\ 8,\ -8),\ r=8\}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

となり，$-(ax_0+by_0+cz_0)=d$ とおくことにより，平面の一般式

$$ax+by+cz+d=0\qquad\cdots\cdots\ ㋐$$

を得ることができる．

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 ㋐ との距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

である．

本問の平面 α は，$\mathrm{A}(6,\ 6,\ 3)$ を通り，ベクトル $(3,2,6)$ に垂直であるから，α の方程式は

$$3(x-6)+2(y-6)+6(z-3)=0$$

$$\therefore\quad 3x+2y+6z-48=0$$

である．半径 r の球は各座標平面に接して，その中心 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ が $a\geqq 0,\ b\geqq 0$ であるので，P の座標は

$$(r,\ r,\ r)\text{ または }(r,\ r,\ -r)$$

と表せる．この球は 平面 α とも接するから

$$(\mathrm{P}\text{ と }\alpha\text{ の距離})=r\qquad\cdots\cdots\ (**)$$

である．

(i) $\mathrm{P}(r,\ r,\ r)$ のとき

$$(**)\iff\frac{|3r+2r+6r-48|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=r$$

$$\therefore\quad 11r-48=\pm 7r\qquad\therefore\quad r=12,\ \frac{8}{3}$$

(ii) $\mathrm{P}(r,\ r,\ -r)$ のとき

$$(**)\iff\frac{|3r+2r-6r-48|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=r$$

$$\therefore\quad r+48=\pm 7r\qquad\therefore\quad r=8\quad(\because\ r>0)$$

(i)，(ii) より，点 P と r の組は

$$\{\mathrm{P}(12,\ 12,\ 12),\ r=12\},\ \left\{\mathrm{P}\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right),\ r=\frac{8}{3}\right\},$$
$$\{\mathrm{P}(8,\ 8,\ -8),\ r=8\}$$

である．

【4 − 1】$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 0\right)=\frac{1}{6}(-3,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(-2,\ 0,\ 1)$ より，

$\vec{n}=(1,\ b,\ c)$ ($b,\ c$ は実数) とおくと，$\vec{n}$ が平面 ABC と垂直になる条件は

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\iff\begin{cases}(-3,\ 2,\ 0)\cdot(1,\ b,\ c)=0\\ (-2,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ b,\ c)=0\end{cases}$$

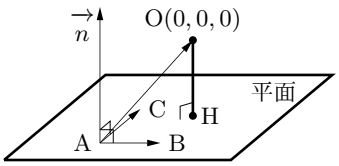
$$\therefore\quad\begin{cases}-3+2b=0\\ -2+c=0\end{cases}\qquad\therefore\quad b=\frac{3}{2},\quad c=2$$

よって，$\vec{n}=\left(1,\ \boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \mathbf{2}\right)$ である． ……(答)

原点 O から平面 ABC に下した垂線の足を H とおくと，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}=k\left(1,\ \frac{3}{2},\ 2\right)$$

と表すことができる．



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$$
$$\iff\vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$
$$\iff\vec{n}\cdot(k\vec{n}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\vec{n}|^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{9}{4}+4}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{29}{4}}=\frac{2}{29}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=|k\vec{n}|=\frac{2}{29}\sqrt{\frac{29}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{29}}}$$ ……(答)

また，E は原点 O に関する位置ベクトルが $2\vec{n}$ となる点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\vec{n}=2\left(1,\ \frac{3}{2},\ 2\right)=(2,\ 3,\ 4)$$

である．原点 O と点 E が点 $\mathrm{D}(\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha)$ を中心とする球面上にあるから

$$\mathrm{OD}^2=\mathrm{DE}^2$$
$$\iff\alpha^2+(2\alpha)^2+(3\alpha)^2=(\alpha-2)^2+(2\alpha-3)^2+(3\alpha-4)^2$$

$$\therefore\quad 0=-40\alpha+29\qquad\therefore\quad\alpha=\boldsymbol{\frac{29}{40}}$$ ……(答)

である．

- 正射影ベクトルを利用する．

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} &= |\overrightarrow{\mathrm{AO}}\text{の}\overrightarrow{n}\text{への正射影ベクトル}| \\ &= \left|\frac{(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right| \\ &= \left|\frac{\frac{1}{2}+0+0}{\sqrt{1+\frac{9}{4}+4}}\right| = \frac{1}{\sqrt{4+9+16}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

である．

- 点と平面との距離の公式を利用する．

3 点 A，B，C を通る平面は，x 切片が $\frac{1}{2}$，y 切片が $\frac{1}{3}$，z 切片が $\frac{1}{4}$ なので，その方程式は

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}+\frac{z}{\frac{1}{4}}=1$$

$$\therefore\quad 2x+3y+4z=1$$

である．よって $(2,\ 3,\ 4)=2\left(1,\ \frac{3}{2},\ 2\right)$ は平面 ABC に垂直なベクトルの 1 つであり，x 成分に注意すると

$$\overrightarrow{n}=\left(1,\ \frac{3}{2},\ 2\right)$$

である．

原点 O と平面 ABC の距離は

$$\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{29}}$$

である．

5 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ は，単位円上の異なる 3 点なので，

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma,\ \gamma\neq\alpha \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) z が直線 AB 上の点であるための条件は

$$z-\alpha=t(\beta-\alpha)\text{ を満たす実数 }t\text{ が存在する} \qquad \cdots\cdots ③$$

ことであり，②に注意すると

$$③ \iff \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\text{は実数である} \iff \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$$

ここで，①より

$$|\alpha|^2=|\beta|^2=1 \qquad \therefore\quad \alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$$

$$\therefore\quad \overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\quad \overline{\beta}=\frac{1}{\beta}$$

であるから

$$\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)} = \frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \frac{\overline{z}-\dfrac{1}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha\beta\overline{z}-\beta}{\alpha-\beta}$$

したがって

$$\text{③} \iff \frac{\alpha\beta\overline{z}-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$\iff -(\alpha\beta\overline{z}-\beta) = z-\alpha \quad (\because \text{②})$$

$$\therefore \quad z+\alpha\beta\overline{z} = \alpha+\beta$$

を満たす． …… (証明終わり)

(2) 点 $\mathrm{C}'(\gamma')$ は，線 AB 上にはない点 $\mathrm{P}(w)$ から直線 AB 下ろした垂線の足なので

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{C'P} \iff \frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha} \text{は純虚数である}$$

$$\iff \overline{\left(\frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha}\right)} + \frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha} = 0 \qquad \cdots\cdots \text{④}$$

(1) と同じく変形すると

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha}\right)} + \frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha} &= \frac{\overline{w}-\overline{\gamma'}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} + \frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\overline{w}-\overline{\gamma'}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}} + \frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\alpha\beta(\overline{w}-\overline{\gamma'})}{\alpha-\beta} + \frac{w-\gamma'}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\alpha\beta\overline{w}-\alpha\beta\overline{\gamma'}-w+\gamma'}{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{C}'(\gamma')$ は直線 AB 上の点であるから，(1) より

$$\gamma'+\alpha\beta\overline{\gamma'} = \alpha+\beta$$

を満たすから

$$\text{④} \iff \frac{\alpha\beta\overline{w}+(\gamma'-\alpha-\beta)-w+\gamma'}{\alpha-\beta} = 0$$

$$\therefore \quad 2\gamma' = \alpha+\beta+w-\alpha\beta\overline{w}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(3) 3 点 $\mathrm{A}'(\alpha')$，$\mathrm{B}'(\beta')$，$\mathrm{C}'(\gamma')$ が一直線上にあるとき

$$\overline{\left(\frac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'}\right)} = \frac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'} \qquad \cdots\cdots \text{⑤}$$

が成り立つ．

(2) と同様にして，3 点 $\mathrm{A}'(\alpha')$，$\mathrm{B}'(\beta')$，$\mathrm{C}'(\gamma')$ に対して

$$2\gamma' = \alpha+\beta+w-\alpha\beta\overline{w}$$

$$2\alpha' = \beta+\gamma+w-\beta\gamma\overline{w}$$

$$2\beta' = \gamma+\alpha+w-\gamma\alpha\overline{w}$$

が成り立つ．したがって

$$2(\beta'-\alpha')=(\alpha-\beta)(1-\gamma\overline{w})$$
$$2(\gamma'-\alpha')=(\alpha-\gamma)(1-\beta\overline{w})$$

とかける．このとき

$$\frac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'}=\frac{(\alpha-\beta)(1-\gamma\overline{w})}{(\alpha-\gamma)(1-\beta\overline{w})}$$

また

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'}\right)}&=\frac{(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(1-\overline{\gamma}w)}{(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})(1-\overline{\beta}w)}\\&=\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)\left(1-\dfrac{1}{\gamma}w\right)}{\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\gamma}\right)\left(1-\dfrac{1}{\beta}w\right)}\\&=\frac{(\beta-\alpha)(\gamma-w)}{(\gamma-\alpha)(\beta-w)}\end{aligned}$$

が成り立つから

$$⑤ \iff \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-w)}{(\gamma-\alpha)(\beta-w)}=\frac{(\alpha-\beta)(1-r\overline{w})}{(\alpha-\gamma)(1-\beta\overline{w})}$$

$$\therefore\quad (1-\gamma\overline{w})(\beta-w)=(1-\beta\overline{w})(\gamma-w)$$
$$\gamma w\overline{w}-w-\beta\gamma\overline{w}+\beta=\beta w\overline{w}-w-\beta\gamma\overline{w}+\gamma$$
$$(\beta-\gamma)w\overline{w}+\gamma-\beta$$
$$\therefore\quad (\beta-\gamma)(1-w\overline{w})=0$$
$$\therefore\quad |w|=1$$

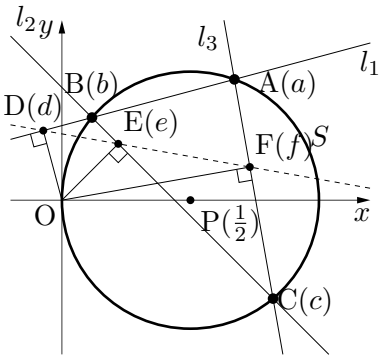
を満たす．これより，$\mathrm{P}(w)$ は単位円上にあるといえる．　　……(証明終わり)

【5 – 1】

(1) 3 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$，$\mathrm{C}(c)$ は，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円 S 上の点だから

$$\left|a-\frac{1}{2}\right|=\left|b-\frac{1}{2}\right|=\left|c-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．$\mathrm{Q}(2ab)$ としたときの △OAQ，△OBQ について調べる．



△OAQ について

$$\mathrm{OA}=|a|$$
$$\mathrm{AQ}=|2ab-a|=2|a|\left|b-\frac{1}{2}\right|=|a|\quad(\because ①)$$
$$\mathrm{OQ}=|2ab|$$

したがって，△OAQ は OA = AQ の二等辺三角形である．　　……(証明終わり)

△OBQ について

$$\mathrm{OB} = |b|$$

$$\mathrm{BQ} = |2ab - b| = 2|b|\left|a - \frac{1}{2}\right| = |b| \quad (\because \ ①)$$

$$\mathrm{OQ} = |2ab|$$

したがって，△OBQ は OB = BQ の二等辺三角形である． ……(証明終わり)

(2) (1) より，直線 AB すなわち l_1 は線分 OQ の垂直二等分線であるから，O から l_1 に下ろした垂線の足 D は線分 OQ の中点である．よって

$$\boldsymbol{d = \frac{2ab}{2} = ab} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．同じく

$$\boldsymbol{e = bc, \quad f = ca} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 3 点 D, E, F は同一直線上にあり，点 O からその直線に下ろした垂線の足を表す複素数は abc であることを示すには，点 R$(2abc)$ をしたとき，3 点 D(ab), E(bc), F(ca) が線分 OR の垂直二等分線上にあることを示せばよい．

$$\mathrm{DR} = |2abc - ab| = 2|ab|\left|c - \frac{1}{2}\right| = |ab| \quad (\because \ ①)$$

$$\therefore \quad \mathrm{OD} = \mathrm{DR}$$

同じく

$$\mathrm{OE} = \mathrm{ER}, \quad \mathrm{OF} = \mathrm{FR}$$

であり，3 点 D，E，F は線分 OR の垂直二等分線上にある．この直線を m とすると，3 点 D，E，F は同一直線上 m にある． ……(証明終わり)

点 O から直線 m に下ろした垂線の足は線分 OR の中点であり，これを表す複素数は

$$\boldsymbol{\frac{2abc}{2} = abc} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- (1) での Q$(2ab)$ は垂線の足 D を表す複素数が ab であることを示唆しているが，D を表す複素数を直接求めてみよう．

  A(a), B(b), D(d) のとき，D が O から直線 AB に下した垂線の足である条件は

$$\begin{cases} \mathrm{AB} \perp \mathrm{OD} \\ \mathrm{D}\text{ は直線 AB 上の点である} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{d}{b-a}\text{ は純虚数である} \\ \dfrac{d-a}{b-a}\text{ は実数である} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{\left(\dfrac{d}{b-a}\right)} + \dfrac{d}{b-a} = 0 \\ \overline{\left(\dfrac{d-a}{b-a}\right)} = \dfrac{d-a}{b-a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (b-a)\overline{d} + (\overline{b} - \overline{a})d = 0 \\ (b-a)(\overline{d} - \overline{a}) = (\overline{b} - \overline{a})(d-a) \end{cases} \qquad (\because \ a \neq b)$$

第 1 式より $(b-a)\overline{d}=(\overline{a}-\overline{b})r$ であり，第 2 式に代入すると

$$(\overline{a}-\overline{b})r-(b-a)\overline{a}=(\overline{b}-\overline{a})(r-a)$$
$$2(\overline{a}-\overline{b})r=\overline{a}b-a\overline{b}$$
$$\therefore\quad d=\frac{\overline{a}b-a\overline{b}}{2(\overline{a}-\overline{b})}\qquad\cdots\cdots ㋐$$

① より

$$\left|a-\frac{1}{2}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\qquad\therefore\quad \overline{a}a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\overline{a}=0\qquad\therefore\quad \overline{a}=\frac{a}{2a-1}$$

同じく $\overline{b}=\dfrac{b}{2b-1}$ であるから

$$d=\frac{\dfrac{a}{2a-1}b-a\dfrac{b}{2b-1}}{2\left(\dfrac{a}{2a-1}-\dfrac{b}{2b-1}\right)}=\frac{ab\{(2b-1)-(2a-1)\}}{2a(2b-1)-b(2a-1)}=\frac{2ab(b-a)}{2(-a+b)}=ab$$

である．

- (3) で D，E，F が同一直線上にあることを示すのに

$$\frac{e-d}{f-d}\text{が実数であること，すなわち}\overline{\left(\frac{bc-ab}{ca-ab}\right)}=\frac{bc-ab}{ca-ab}\ \cdots\cdots\ (*)$$

であることを示してもよい．① より

$$\overline{a}=\frac{a}{2a-1},\quad \overline{b}=\frac{b}{2b-1},\quad \overline{c}=\frac{c}{2c-1}$$

であったから

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{bc-ab}{ca-ab}\right)}&=\frac{\overline{b}(\overline{c}-\overline{a})}{\overline{a}(\overline{c}-\overline{b})}=\frac{\dfrac{b}{2b-1}\left(\dfrac{c}{2c-1}-\dfrac{a}{2a-1}\right)}{\dfrac{a}{2a-1}\left(\dfrac{c}{2c-1}-\dfrac{b}{2b-1}\right)}\\&=\frac{b\{c(2a-1)-a(2c-1)\}}{a\{c(2b-1)-b(2c-1)\}}\\&=\frac{b(a-c)}{a(b-c)}=\frac{bc-ab}{ca-ab}\end{aligned}$$

$(*)$ は成り立つ．

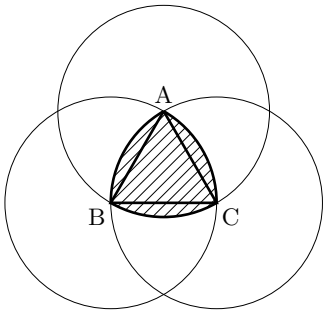
さらに，O から D，E，F を通る直線に下ろした垂線の足を G(g) とおくと，㋐ より

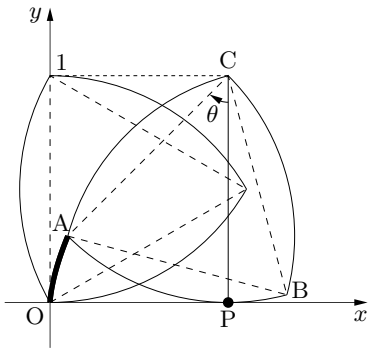
$$\begin{aligned}g&=\frac{\overline{d}e-d\overline{e}}{2(\overline{d}-\overline{e})}=\frac{\overline{ab}bc-ab\overline{bc}}{2(\overline{ab}-\overline{bc})}=\frac{\dfrac{a}{2a-1}\dfrac{b}{2b-1}bc-ab\dfrac{b}{2b-1}\dfrac{c}{2c-1}}{2\left(\dfrac{a}{2a-1}\dfrac{b}{2b-1}-\dfrac{b}{2b-1}\dfrac{c}{2c-1}\right)}\\&=\frac{ab^2c\{(2c-1)-(2a-1)\}}{2b\{a(2c-1)-c(2a-1)\}}=\frac{2ab^2c(c-a)}{2b(c-a)}=abc\end{aligned}$$

となる．

6

(1) 図形 K は下左図の斜線部分である．





OP の長さは，C を中心とする半径 1 の円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の長さ θ に等しい．また，CA は CP を C のまわりに $-\theta$ 回転したものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって，A の座標は

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta - \sin\theta},\ \mathbf{1} - \boldsymbol{\cos\theta}) \quad \left(\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

と表される．

- $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲で A の描く曲線はサイクロイドである．

(2) K が 1 回転したとき，A は x 軸上にあり，このときの x 座標は半径 1 の 3 つの円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ の和

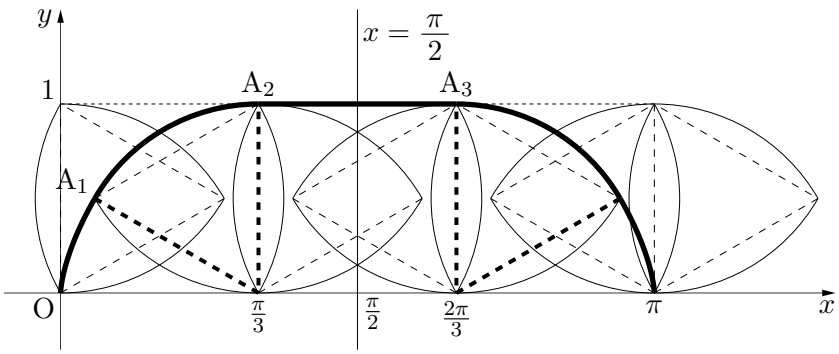
$$3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$$

に等しい．よって，点 A の座標は

$$(\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{0}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) A の描く曲線 L は下図のようになる．



曲線 L は直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であり

- $\mathrm{OA_1}$ は，(1) で求めたサイクロイドであり，$\mathrm{A_1}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である．
- $\mathrm{A_1A_2}$ は，点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$ を中心とする半径 1，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の円弧である．
- $\mathrm{A_2A_3}$ は，直線 $y=1$ 上の線分で長さは $\dfrac{\pi}{3}$ である．

したがって，求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S&=\int_0^{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}y\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\pi 1^2+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 1\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)\,d\theta+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

第 1 項の定積分は

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos\theta)^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\&=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}S&=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

【6 − 1】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}=(R+r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ より，$\mathrm{O_1}$ の座標 $(x,\ y)$ は

$$\boldsymbol{((R+r)\cos\theta,\ (R+r)\sin\theta)}$$ ……(答)

である．

(2) 点 $(R,\ 0)$ から A までの円 C の弧の長さと A から P までの円 C' の弧の長さは等しいから，$R\alpha=r\beta$ であり，$\beta=\dfrac{R}{r}\alpha$ である．$\alpha=\theta$ のとき

$$\boldsymbol{\beta=\frac{R}{r}\theta}$$ ……(答)

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO_1}} + \overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (R+r)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\pi+\beta)\\ \sin(\alpha-\pi+\beta)\end{pmatrix}\\ &= (R+r)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\cos(\alpha+\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，$\alpha=\theta$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (R+r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}\cos\dfrac{R+r}{r}\theta\\ \sin\dfrac{R+r}{r}\theta\end{pmatrix}$$

よって P の座標 $(x,\ y)$ は

$$\boldsymbol{\left((R+r)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta,\ (R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta\right)}$$

……(答)

である．

(4) (3) より，$R=2r$ のとき

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 3r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}\cos 3\theta\\ \sin 3\theta\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{d\theta}\\ \dfrac{dy}{d\theta}\end{pmatrix} = 3r\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} - 3r\begin{pmatrix}-\sin 3\theta\\ \cos 3\theta\end{pmatrix} = 3r\begin{pmatrix}-\sin\theta+\sin 3\theta\\ \cos\theta-\cos 3\theta\end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\\ &= 9r^2\{(\sin^2\theta - 2\sin\theta\sin 3\theta + \sin^2 3\theta) + (\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos 3\theta + \cos^2 3\theta)\}\\ &= 9r^2(2-2\cos 2\theta)\\ &= 36r^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

である．よって，軌跡 S の長さ L は

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\pi}\sqrt{36r^2\sin^2\theta}\,d\theta\\ &= 6r\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\\ &= 6r\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\\ &= \boldsymbol{12r}\end{aligned}$$

……(答)

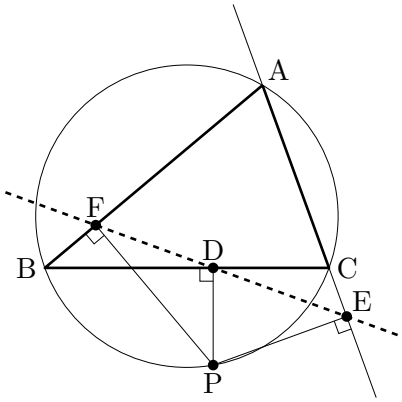
である．

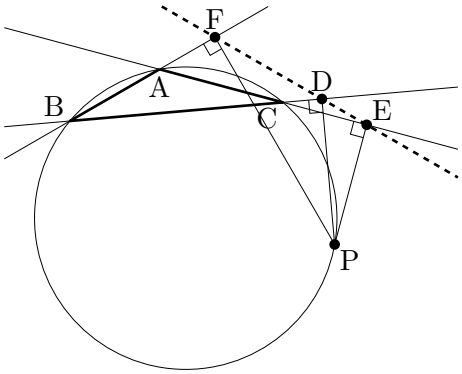
8　追記　シムソンの定理

＝ シムソンの定理 ＝

シムソンの定理

△ABC の外接円上の任意の点 P から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足 D，E，F は一直線上にある．ただし，P は頂点 A，B，C のいずれとも異なるものとする．





左図では D，F は辺上，E は辺の延長上にあるが，右図では D，E，F のどれもが辺の延長上にある．図による証明では特殊な場合の証明になっていないかに注意しなければならない．

【証明】P は △ABC の外接円上にあり，A，B，C のいずれとも異なるから，P は ∠A，∠B，∠C の内部のいずれかにある．∠A の内部にあるとして一般性を失わない．

このとき四角形 ABPC は円に内接しており

$$\angle \mathrm{PBA} + \angle \mathrm{PCA} = 180^\circ \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

(i) $\angle \mathrm{PBA} = 90^\circ$ のとき

① より $\angle \mathrm{PCA} = 90^\circ$ でもあり，F は B と，E は C と一致する．さらに，D は P から直線 BC に下した垂線の足であるから，3 点 D，E，F は一直線 (BC) 上にある．

(ii) $\angle \mathrm{PBA} \neq 90^\circ$ のとき

∠PBA，∠PCA の一方は鋭角，他方は鈍角である．∠PBA を鋭角としても一般性を失わない (∠PCA が鋭角のときは B，C を入れ換えて証明すればよい)．

このとき F は半直線 BA 上にあり，F は

BA の間にある，A と一致する，BA の延長上にある

のいずれかである．

(ア) F が BA の間にあるとき

$\angle PDB = \angle PFB = 90^\circ$ より，四角形 PDFB は PB を直径とする円に内接するから

$$\angle PDF + \angle PBF = 180^\circ \qquad \cdots\cdots ②$$

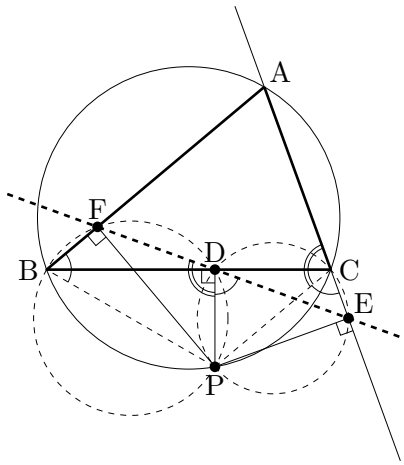
である．$\angle PBF = \angle PBA$ であり，四角形 PBAC は $\triangle ABC$ の外接円に内接するから

$$\angle PBF + \angle PCA = 180^\circ \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③ より

$$\angle PDF = \angle PCA$$

である．また，$\angle PCA$ の外角 $\angle PCE$ は $\angle PBA$ に等しい．



$$\angle PCE = \angle PBA$$

さらに，$\angle PDC = \angle PEC = 90^\circ$ より，四角形 PDCE は PC を直径とする円に内接するから，円周角不変の定理より

$$\angle PCE = \angle PDE$$

でもある．

よって

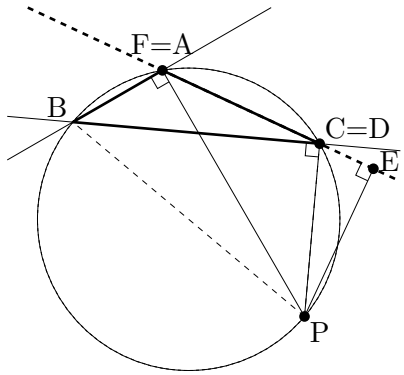
$$\angle PDF + \angle PDE = \angle PCA + \angle PCE = 180^\circ$$

であり，D，E，F は一直線上にある．

(イ) F が A と一致するとき

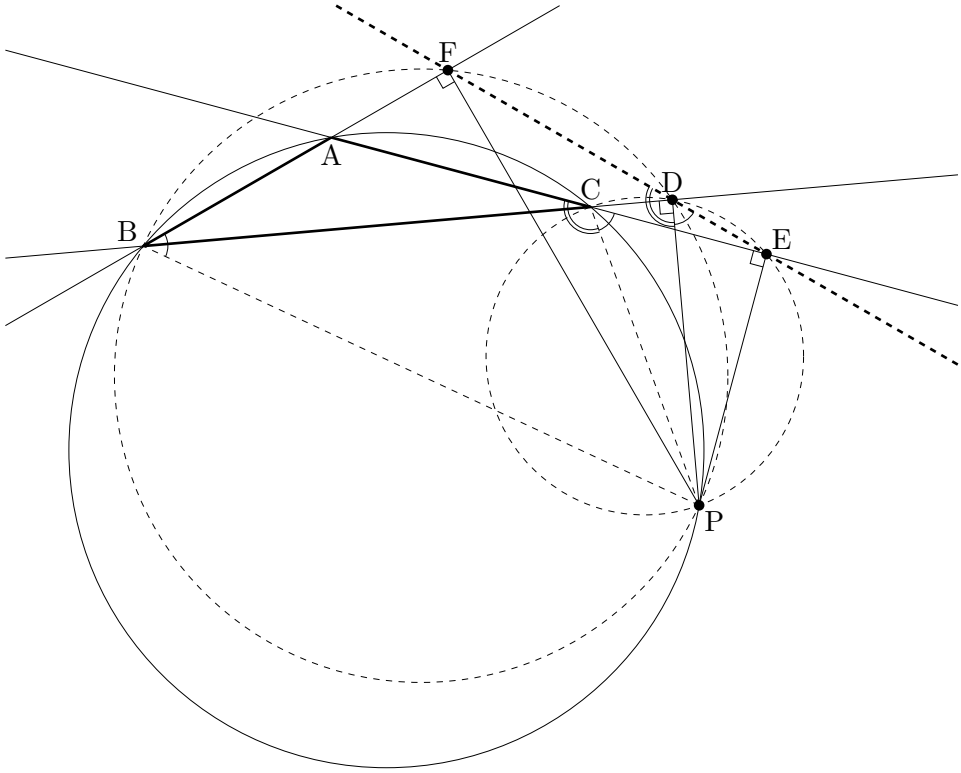
F(=A) は P から AB に下ろした垂線の足であるから，PB を直径とする円は $\triangle ABP$ の外接円であり，P は $\triangle ABC$ の外接円上の点であるから，この円は $\triangle ABC$ の外接円である．C は PB を直径とする円上の点であるから $\angle PCB = 90^\circ$ であり，D は C と一致する．

E は P から直線 AC に下ろした垂線の足であるから，直線 FD に下ろした垂線の足でもあり，D，E，F は一直線上にある．



(ウ) F が BA の延長上にあるとき

(ア) と同じ議論が成り立つ．



以上 (i)，(ii) より，この定理は示された． …… (証明終わり)

シムソンの逆定理

点 P から △ABC の三辺 BC，CA，AB またはその延長に下ろした垂線の足 D，E，F が一直線上にあれば，P は △ABC の外接円上にある．

P が ∠A の内部にあるとして一般性を失わない．

(i) $\angle PBA = 90^\circ$ のとき

F は P から直線 AB に下した垂線の足であるから，F=B である．D は P から直線 BC に下した垂線の足であるから，直線 BC と直線 FD は一致する．

条件より，E は直線 FD 上にあるから，直線 BC 上の点である．また，E は P から直線 CA に下した垂線の足であるから，E は直線 CA，BC の交点であり，E = C である．$\angle PCA = \angle PEA = 90^\circ$ であり，B，C は PA を直径とする円上にある．

すなわち，P は △ABC の外接円上にある．

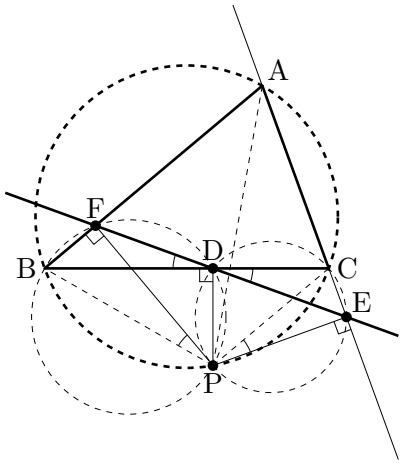
(ii) $\angle PBA \neq 90^\circ$ のとき

∠PBA を鋭角としても一般性を失わない．このとき F は半直線 BA 上にあり，F は

BA の間にある，A と一致する，BA の延長上にある

のいずれかである．

(ア) F が BA の間にあるとき



直線 BC と EF は D で交わるから

$$\angle \mathrm{BDF} = \angle \mathrm{CDE}$$

である．

$\angle \mathrm{PDB} = \angle \mathrm{PFB} = 90^\circ$ より，四角形 PDFB は PB を直径とする円に内接するから，円周角不変の定理より

$$\angle \mathrm{BDF} = \angle \mathrm{BPF}$$

である．

また，$\angle \mathrm{PDC} = \angle \mathrm{PEC} = 90^\circ$ より，四角形 PDCE は PC を直径とする円に内接するから，円周角不変の定理より

$$\angle \mathrm{CDE} = \angle \mathrm{CPE}$$

である．したがって

$$\angle \mathrm{BPF} = \angle \mathrm{CPE}$$

である．この準備のもとで直角三角形 FPA，EPA の内角に着目すると

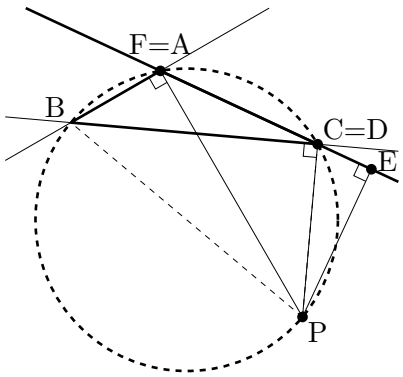
$$\angle \mathrm{FPA} + \angle \mathrm{FAP} = 90^\circ$$
$$(\angle \mathrm{CPE} + \angle \mathrm{CPA}) + \angle \mathrm{EAP} = 90^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{BPC} \\
&= (\angle \mathrm{FAP} + \angle \mathrm{CAP}) + (\angle \mathrm{BPF} + \angle \mathrm{FPA} + \angle \mathrm{CPA}) \\
&= \underline{\angle \mathrm{FAP}} + \angle \mathrm{EAP} + \angle \mathrm{CPE} + \underline{\angle \mathrm{FPA}} + \angle \mathrm{CPA} \\
&= (\underline{\angle \mathrm{FAP}} + \underline{\angle \mathrm{FPA}}) + (\angle \mathrm{EAP} + \angle \mathrm{CPE} + \angle \mathrm{CPA}) \\
&= 90^\circ + 90^\circ \\
&= 180^\circ
\end{aligned}$$

4 点 A，B，P，C は一つの円周上にある．すなわち，P は △ABC の外接円上にある．

(イ) F が A と一致するとき



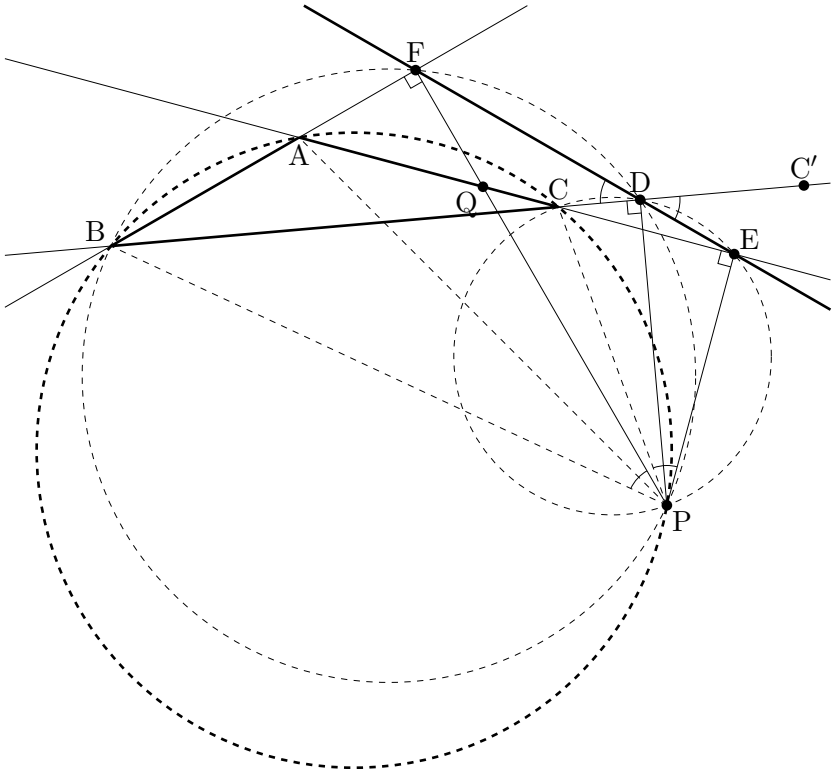
F(=A) は P から AB に下ろした垂線の足であり，PB を直径とする円は △ABP の外接円である．

D は P から BC に下ろした垂線の足であり，直線 BC 上の点である．また，条件より D は直線 EF 上の点であり，直線 EF は直線 AC と一致するから，D は直線 AC 上の点である．すなわち，D は直線 BC，直線 AC の交点 C と一致する．このとき

$$\angle \mathrm{PCB} = \angle \mathrm{PDB} = 90^\circ$$

であり，C は PB を直径とする円上にある．すなわち，P は △ABC の外接円上にある．

(ウ) F が BA の延長上にあるとき



直線 BC と EF は D で交わるから，CD の延長上に点 C′ をとると

$$\angle \mathrm{BDF} = \angle \mathrm{C'DE}$$

である．

$\angle \mathrm{PDB} = \angle \mathrm{PFB} = 90^\circ$ より，四角形 PDFB は PB を直径とする円に内接し，円周角不変の定理より

$$\angle \mathrm{BDF} = \angle \mathrm{BPF}$$

である．

また，$\angle \mathrm{PDC} = \angle \mathrm{PEC} = 90^\circ$ より，四角形 PCDE は PC を直径とする円に内接するから

$$\angle \mathrm{C'DE} = \angle \mathrm{CPE}$$

である．したがって

$$\angle \mathrm{BPF} = \angle \mathrm{CPE} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．直線 AC と直線 PF の交点を Q とおき，この準備のもとで直角三角形 FQA，

EQP に着目すると

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{QAF} &= 90^\circ - \angle\mathrm{AQF} = 90^\circ - \angle\mathrm{PQE}\\ &= \angle\mathrm{QPE} \quad (\text{AP を直径とする円の円周角とみてもよい})\\ &= \angle\mathrm{QPC} + \angle\mathrm{CPE}\\ &= \angle\mathrm{QPC} + \angle\mathrm{BPF} \quad (\because\ ①)\\ &= \angle\mathrm{BPC}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{BPC}\\ &= \angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{QAF}\\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

4 点 A，B，P，C は一つの円周上にある．すなわち，P は △ABC の外接円上にある．

以上 (i)，(ii) より，この定理は示された． …… (証明終わり)