# 最近の入試問題から

## 東京都立戸山高等学校

2022 年 11 月 5 日 (土)

## 目 次


**1** 論証 **1**

**2** 場合の数・確率 **2**

**3** オイラーの多面体定理 **3**

**4** とりうる値の範囲 **4**

**5** 通過領域 **5**

**6** 体積 **6**

**7** 解答例 **7**

# 1　論証

**1**　次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい．

(1) $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ が有理数であり，$\tan(\alpha+\beta)$ が定義されるとき，$\tan(\alpha+\beta)$ も有理数であることを示せ．

(2) $\tan 10^\circ$ は無理数であることを示せ．

(3) $\tan(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ が成り立つことを，鋭角の三角比の定義にもとづいて説明せよ．

(4) $\tan 8^\circ$ は無理数であることを示せ．

(22 北海道教育大 3)

**参考問題**

【1 − 1】$\tan 1^\circ$ は有理数か．

(06 京都大 後期 理系 6)

【1 − 2】$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような $\theta$ の値を求めよ．ただし，$p$ が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい．

(19 京都大 理系 1(1))

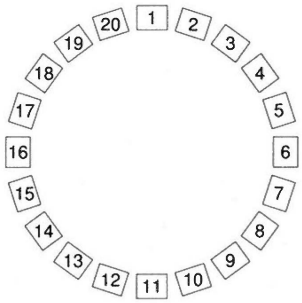
## 2　場合の数・確率

**2**　次の問いに答えよ．

(1) 1 から 9 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(2) 1 から 50 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(3) 1 番から 20 番までの番号が書かれた座席が，図のように円形に並んでいる．この中から，2 つ以上の間隔を空けて 3 つの座席を選ぶ (例えば，1 番を選んだときは 2 番，3 番，19 番，20 番は選べない)．このような 3 つの座席の選び方は全部で何通りあるか．




(22 琉球大・工・医・理・教育 4)

### 参考問題

【2 − 1】箱の中に 1 から $n$ までの番号がついた $n$ 枚の札がある．ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする．この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に $X,\ Y,\ Z$ とする．このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ．

(22 京都大 理系 2)

## 3　オイラーの多面体定理

**3**　次のような凸多面体 $K$, $K'$ について考える．$K$ と $K'$ のどちらについても，各面は，正方形または正六角形である．また，$K$ について，頂点の数 $v$ は 24，辺の数 $e$ は 36 である．次の問いに答えよ．

(1) $K$ の面の数 $f$ を求めよ．
(2) $K'$ の各頂点について，その頂点に集まる面の数が 3 であることを示せ．
(3) $K'$ について，正方形である面の数が 6 であることを示せ．
(4) $K'$ の面の数を $f'$ とするとき，$f \geqq f'$ であることを示せ．

(22 大阪公立大 後 理 5)

参考問題

【3 − 1】$n$ は 3 以上の整数とする．正 $n$ 角形の外接円の半径を正 $n$ 角形の半径とよぶ．

$2n+2$ 個の面で囲まれた凸多面体で，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たすものを $A_n$ とする．

(a) 2 個の半径 1 の正 $n$ 角形を面にもち，それらは平行である．
(b) (a) の 2 個の面の他に互いに合同な $2n$ 個の正三角形を面にもつ．

例えば，$A_3$ は正八面体になる．$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ とおく．

(1) $A_n$ の辺の数を $n$ を用いて表せ．
(2) 条件 (b) の正三角形の高さを $\theta$ を用いて表せ．

条件 (a) の 2 つの面の間の距離 (一方の面から他方の面へ引いた垂線の長さ) を $H$ とする．

(3) $H$ を $\theta$ を用いて表せ．
(4) $A_n$ の体積を $V$ とするとき，$\dfrac{V}{nH}$ を $\theta$ を用いて表せ．

(22 京都府医大 4)

# 4　とりうる値の範囲

**4**　$a,\ b$ を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする．$a,\ b$ が

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 $z$ がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

(22 東京工大 1)

参考問題

【4 − 1】$a$ を実数とする．$x$ の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2-1=0$ について，以下の問に答えよ．

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつような $a$ の値の範囲を求めよ．

(2) $a$ を (1) で求めた範囲で動かすとき，この 2 次方程式の実数解がとりうる値の範囲を求めよ．

(21 神戸大 後 理系 4)

## 5　通過領域

**5**　$a$ は正の実数とする．複素数 $z$ が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を $K$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $K$ が円となるための $a$ の条件を求めよ．また，そのとき $K$ の中心が表す複素数と $K$ の半径を，それぞれ $a$ を用いて表せ．

(2) $a$ が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 $K$ の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

(22 東京工大 4)

参考問題

【5 – 1】正の実数 $t$ に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．$t$ が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

(22 大阪大 理系 3)

【5 – 2】$xy$ 平面上に，2 点 $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \cos^2\theta\right)$，$\mathrm{Q}\left(\sin\theta,\ \sin^2\theta\right)$ をとる．線分 PQ の中点の $x$ 座標を $t$ とし，線分 PQ の長さを $L$ とおく．$\theta$ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，以下の設問に答えよ．なお各設問の答えは解答用紙 (省略) の指定欄に記入し，左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること．

(1) 直線 PQ の方程式を $t$ を用いて表せ．

(2) $L$ の値の範囲を求めよ．

(3) $L$ が最大値をとるときの $\theta$ の値を求めよ．

(4) 線分 PQ が通過する領域を $xy$ 平面上に図示せよ．

(22 関西医大 4)

## 6　体積

**6**　座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3,\ 0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を $C$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $C$ のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を $D_1$ とするとき，$D_1$ の体積を求めよ．
(2) $C$ のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を $D_2$ とするとき，$D_2$ の体積を求めよ．
(3) $C$ のうち，$yz$ 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を $D$ とするとき，$D$ の体積を求めよ．

(22 関西医大 )

参考問題

【6 − 1】座標空間内に 4 点 A(1, 0, 1)，B(−1, 0, 1)，C(0, 1, −1)，D(0, −1, −1) をとる．点 P が線分 AB 上を動き，点 Q が線分 CD 上を動くとき，線分 PQ 上の点が通過し得る領域を $S$ とする．このとき以下が成り立つ．

(a) $S$ の体積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(b) $z$ 軸の周りに $S$ を回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$ である．

(22 東京理大 理 (応数・応物・応化) 1(1))

【6 − 2】曲線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を $C$ とし，直線 $y=1-x$ を $\ell$ とする．

(1) $C$ 上の点 $(x,\ y)$ と $\ell$ の距離を $f(x)$ とするとき，$f(x)$ の最大値を求めよ．
(2) $C$ と $\ell$ で囲まれた部分を $\ell$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(22 群馬大 医 4)

# 7　解答例

## 1

(1) 加法定理より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

であり，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ が有理数であるならば，右辺は有理数である．

よって，$\tan(\alpha+\beta)$ は有理数である．　　…… (証明終わり)

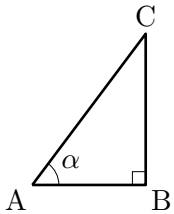
(2) 背理法を用いる．

$\tan 10^\circ$ を有理数と仮定すると，(1) より $\tan 20^\circ=\tan(10^\circ+10^\circ)$ は有理数であり，$\tan 30^\circ=\tan(20^\circ+10^\circ)$，$\tan 60^\circ=\tan(30^\circ+30^\circ)$ も有理数である．

一方，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ は無理数だから，矛盾である．

よって，$\tan 10^\circ$ は無理数である．　　…… (証明終わり)

(3) 直角三角形 ABC において，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$，$\angle\mathrm{A}=\alpha$ とすると $\angle\mathrm{C}=90^\circ-\alpha$ である．鋭角の三角比の定義により




$$\tan\alpha=\tan A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}},$$

$$\tan(90^\circ-\alpha)=\tan C=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

となり，$\tan(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ が成り立つ．　　…… (証明終わり)

(4) 背理法を用いる．

$\tan 8^\circ$ を有理数と仮定すると，(2) と同様にして，$\tan 80^\circ$ も有理数となる．

(3) より

$$\tan 10^\circ=\tan(90^\circ-80^\circ)=\frac{1}{\tan 80^\circ}$$

が成り立つ．この等式の右辺は有理数であるが，(2) より左辺は無理数であり，不合理である．

よって，$\tan 8^\circ$ は無理数である．　　…… (証明終わり)

【1 − 1】$\tan 1^\circ$ は有理数でない (無理数である) ことを背理法で示す．

「$\tan 1^\circ$ が有理数である」 …… $(*)$

と仮定する．このとき $1\leqq n\leqq 89$ を満たすすべての整数 $n$ 対して

「$\tan n^\circ$ が有理数である」 …… $(**)$

ことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

背理法の仮定 $(*)$ により，$n=1$ のとき $(**)$ は成立する．

(ii) $n=k$ $(1\leqq k\leqq 88)$ のとき，$\tan k^\circ$ が有理数であると仮定すると

$$\tan(k+1)^\circ=\frac{\tan k^\circ+\tan 1^\circ}{1-\tan k^\circ\tan 1^\circ}$$

であるから，$n=k+1$ のときも $(**)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より，$1 \leqq n \leqq 89$ を満たすすべての整数 $n$ 対して $(**)$ は成り立つ．

したがって，$\tan 60^\circ$ は有理数となるが，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ であり，これは無理数であるから，不合理である．

よって，$\tan 1^\circ$ は有理数でない (無理数である)．　　…… (証明終わり)

【1 − 2】2 倍角の公式，3 倍角の公式より

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1\\ \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ &= (4\cos^2\theta - 3)\cos\theta\\ &= \left(4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 3\right)\cos\theta\\ &= (2\cos 2\theta - 1)\cos\theta \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．① において，$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$ となり，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ がともに有理数となるときは，$\cos\theta$ も有理数となる．これは $\cos\theta$ が有理数ではないことに反する．したがって

$$2\cos 2\theta - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

であることが必要である．

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 2\theta < \pi$ であるから，これを満たす $\theta$ は

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

である．$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は有理数でない ($\because$ 3 は素数であり，$\sqrt{3}$ は有理数でない)，

$\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$ は有理数であり，$\cos 3\theta = 0$ も有理数である．

与えられた条件を満たすから (十分)，求める $\theta$ の値は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

## 2

(1) 与えられた条件は

$$\begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9\\ a_2 - a_1 \geqq 3\\ a_3 - a_2 \geqq 3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9\\ a_1 + 3 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3\end{cases}$$

$$\iff 4 \leqq a_1 + 3 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 7 \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，$a_2$ を $4 \leqq a_2 \leqq 6$ の範囲で固定したとき

$a_1$ は，$1,\ \cdots,\ a_2-3$ の　　$a_2-3$ 通り
$a_3$ は，$a_2+3,\ \cdots,\ 9$ の　　$7-a_2$ 通り

の選び方がある．よって，求める 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=4}^{6}(a_2-3)(7-a_2)=1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1$$
$$=3+4+3=\mathbf{10\ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

- すべてを書き出すと

$$\begin{tikzcd}
a_1 & a_2 & a_3 \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 4 \arrow[r] & 7,\ 8,\ 9 \\
 & 5 \arrow[r] & 8,\ 9 \\
 & 6 \arrow[r] & 9 \\
2 \arrow[r] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] & 8,\ 9 \\
 & 6 \arrow[r] & 9 \\
3 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 9
\end{tikzcd}$$

の 10 通りである．

- (2) のように $n=50$ となるとすべてを書き出すやり方はツライ．

　組 $(a_1+3,\ a_2,\ a_3-3)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，4，5，6 の 3 種類の数字の中から重複を許して 3 個の数字を選び，小さい方から順に $a_1+3$, $a_2$, $a_3-3$ とすればよい (重複組合せ)．

　よって，組 $(a_1,\ a_2,\ {}_3)$ の選び方は

$${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10\ 通り$$

ある．

- $$① \iff 4\leqq a_1+3<a_2+1<a_3-1\leqq 8$$

であり，組 $(a_1+3,\ a_2+1,\ a_3-1)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，4〜8 の 5 個の数字の中から 3 個の数字を選び，小さい方から順に $a_1+3$, $a_2+1$, $a_3-1$ とすればよい (組合せ)．組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

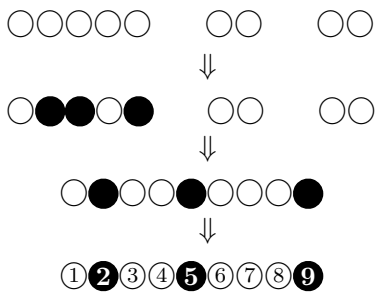
$${}_5\mathrm{C}_3=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10\ 通り$$

ある．

- 5 個，2 個，2 個の球の組をつくり，5 個の球の組から 3 個を選び印をつける．印が付いた球の間に 2 個の球の組を 1 組ずつ入れて 9 個の球の列をつくり，左から順に 1 から 9 の番号をつける．

　このとき，印のついた球の番号 3 つが題意の 3 つの数である．求める場合の数は

$${}_5\mathrm{C}_3=10\ (通り)$$



である．

※この解法は「入試の軌跡」さんによるものです．素晴らしい．

http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/ryukyu/ryukyu_2022.pdf#9

(2) 与えられた条件は

$$\begin{cases} 1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50 \\ a_2 - a_1 \geqq 10 \\ a_3 - a_2 \geqq 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50 \\ a_1 + 10 \leqq a_2 \leqq a_3 - 10 \end{cases}$$

$$\iff 11 \leqq a_1 + 10 \leqq a_2 \leqq a_3 - 10 \leqq 40 \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，$a_2$ を $11 \leqq a_2 \leqq 40$ の範囲で固定したとき

$a_1$ は，$1,\ \cdots,\ a_2 - 10$ の　　$a_2 - 10$ 通り

$a_3$ は，$a_2 + 10,\ \cdots,\ 50$ の　　$41 - a_2$ 通り

の選び方がある．よって，求める 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=11}^{40} (a_2 - 10)(41 - a_2) = \sum_{k=1}^{30} k(31 - k) \quad (\because\ k = a_2 - 10)$$

$$= 31 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6}$$

$$= 31 \cdot 5 \cdot (93 - 61)$$

$$= \mathbf{4960}\ \textbf{通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

- 組 $(a_1 + 10,\ a_2,\ a_3 - 10)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$${}_{30}\mathrm{H}_3 = {}_{30+3-1}\mathrm{C}_3 = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4960 \text{ 通り}$$

ある．

- $② \iff 11 \leqq a_1 + 10 < a_2 + 1 < a_3 - 8 \leqq 42$

であり，組 $(a_1 + 10,\ a_2 + 1,\ a_3 - 8)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$${}_{32}\mathrm{C}_3 = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4960 \text{ 通り}$$

ある．

- 32 個，9 個，9 個の球の組をつくり，32 個の球の組から 3 個を選び印をつける．印が付いた球の間に 9 個の球の組を 1 つずつ入れて 50 個の球の列をつくり，左から順に 1 から 50 の番号をつける．

このとき，印のついた番号 3 つが題意の 3 つの数である．求める場合の数は

$${}_{32}\mathrm{C}_3 = 4960 \text{ (通り)}$$

である．

(3) 選ぶ座席番号を $a_1 < a_2 < a_3$ とする．

(i) $a_1 = 1$ のとき，$a_2$，$a_3$ は 2 つ以上の間隔を空けるから

$$\begin{cases} 4 \leqq a_2 < a_3 \leqq 18 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases} \iff 4 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 15$$

である．$a_2$ を $4 \leqq a_2 \leqq 15$ の範囲で固定するとき，$a_3$ は $18 - (a_2 + 2) = 16 - a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=4}^{15} (16 - a_2) = 12 + 11 + \cdots + 1 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78 \text{ 通り}$$

ある．

(ii) $a_1 = 2$ のとき

$$\begin{cases} 5 \leqq a_2 < a_3 \leqq 19 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases} \iff 5 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 16$$

$a_2$ を $5 \leqq a_2 \leqq 16$ の範囲で固定するとき，$a_3$ は $19 - (a_2 + 2) = 17 - a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=5}^{16} (17 - a_2) = 12 + 11 + \cdots + 1 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78 \text{ 通り}$$

ある．

(iii) $a_1 \geqq 3$ のとき

$$\begin{cases} 3 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_2 - a_1 \geqq 3 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_1 + 3 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \end{cases}$$

$$\iff 6 \leqq a_1 + 3 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 17$$

$a_2$ を $6 \leqq a_2 \leqq 17$ の範囲で固定するとき，$a_1$ は $3,\ \cdots,\ a_2 - 3$ の $a_2 - 5$ 通り，$a_3$ は $20 - (a_2 + 2) = 18 - a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=6}^{17} (a_2 - 5)(18 - a_2) = \sum_{k=1}^{12} k(13 - k) \quad (\because\ k = a_2 - 5)$$

$$= 13 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} - \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6}$$

$$= 2 \cdot 13(39 - 25) = 364 \text{ 通り}$$

ある．

よって，3 つの座席の選び方は

$$78 + 78 + 364 = \mathbf{520} \text{ **通り**} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

ある．

- 重複組合せを用いて数えると

(i) $a_1 = 1$ のとき　${}_{12}\mathrm{H}_2 = {}_{12+2-1}\mathrm{C}_2 = 78$ 通り
(ii) $a_1 = 2$ のとき　${}_{12}\mathrm{H}_2 = 78$ 通り
(iii) $a_1 \geqq 3$ のとき　${}_{12}\mathrm{H}_3 = {}_{12+3-1}\mathrm{C}_3 = 364$ 通り

以上より，全部で

$$78 + 78 + 364 = 520 \text{ 通り}$$

ある．

- 座席が横 1 列のとき，2 つ以上の間隔を空けて 3 つの座席を選ぶ場合の総数は (1) の別解と同様にして，16 個，2 個，2 個の球の組をつくると

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{16\text{ 個}} \qquad \bigcirc\bigcirc \qquad \bigcirc\bigcirc$$

$${}_{16}\mathrm{C}_3 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560 \text{ (通り)}$$

である．座席が円形であるため，この中から

$$(a_1,\ a_3) = (1,\ 20),\ (1,\ 19),\ (2,\ 20)$$

の場合を除けばよい．

$(a_1,\ a_3) = (1,\ 20)$のとき　$a_2 = 4,\ 5,\ \cdots,\ 17$ の 14 通り
$(a_1,\ a_3) = (1,\ 19)$のとき　$a_2 = 4,\ 5,\ \cdots,\ 16$ の 13 通り
$(a_1,\ a_3) = (2,\ 20)$のとき　$a_2 = 5,\ 6,\ \cdots,\ 17$ の 13 通り

よって，求める場合の総数は

$$560 - (14 + 13 + 13) = 520 \text{ (通り)}$$

である．

【2 − 1】$n$ 枚の札から 3 枚を同時に取り出すときの取り出し方は

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{（通り）}$$

あり，これらは同様に確からしい．

取り出した札の番号を小さい順に $X,\ Y,\ Z$ とするとき

$$(*) \begin{cases} 1 \leqq X < Y < Z \leqq n \\ Y - X \geqq 2 \\ Z - Y \geqq 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \leqq X < Y < Z \leqq n \\ X + 2 \leqq Y \leqq Z - 2 \end{cases}$$

$$\iff 3 \leqq X + 2 \leqq Y \leqq Z - 2 \leqq n - 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

となるのは $Y = k\ (k = 3,\ 4,\ \cdots,\ n-2)$ のとき

$X$ は $1,\ 2,\ \cdots,\ k-2$ の $k-2$ 通り，
$Z$ は $k+2,\ k+3\cdots,\ n$ の $n-k-1$ 通り

があるから，$(*)$ を満たす取り出し方は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{n-2}(k-2)(n-k-1)\\
&=\sum_{j=1}^{n-4}j(n-3-j)\quad(\because\ j=k-2\text{ とした. }n\geqq 5\text{ より定義可能})\\
&=(n-3)\frac{(n-4)(n-3)}{2}-\frac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)\\
&=\frac{1}{6}(n-3)(n-4)\{3(n-3)-(2n-7)\}\\
&=\frac{1}{6}(n-3)(n-4)(n-2)\ (\text{通り})
\end{aligned}$$

である．

よって，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{6}(n-3)(n-4)(n-2)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 次のように考えてもよい．

  ① を満たす $(X+2,\ Y,\ Z-2)$ に対し $(X,\ Y,\ Z)$ は一意に決まるから，3, 4, $\cdots$, $n-2$ の $n-4$ 種類の中から重複を許して 3 個の数字を選び，小さい方から順に $X+2,\ Y,\ Z-2$ とすればよい (重複組合せ)．$(X,\ Y,\ Z)$ の総数は

  $${}_{n-4}\mathrm{H}_3={}_{n-2}\mathrm{C}_3=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$

  である．以下解答と同じ．

- $n-3$ 個の白玉を 1 列に並べておいて，その両端と隙間をあわせた $n-2$ヶ所のうちの 3ヶ所を選んで赤玉を入れる．ついで，$n$ 個の玉全部に順に番号をつけ，赤玉の番号を小さい順に $X,\ Y,\ Z$ とすると「$Y-X\geqq 2$ かつ $Z-Y\geqq 2$」を満たす．このような赤玉の入れ方は

  $${}_{n-2}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)\ \text{通り}$$

  ある．以下解答と同じ．

- $n-2$ 個，1 個，1 個の球の組をつくり，$n-2$ 個の球の組から 3 個を選び印をつける．印が付いた球の間に 1 個の球の組を 1 つずつ入れて $n$ 個の球の列をつくり，左から順に 1 から $n$ の番号をつける．

  このとき，印のついた番号 3 つが題意の 3 つの数 $X,\ Y,\ Z$ である．求める場合の数は

  $${}_{n-2}\mathrm{C}_3=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$

  ある．以下解答と同じ．

- 余事象を考えてもよい．

「$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$」の余事象は,「$Y-X=1$ または $Z-Y=1$」である.

小さい順に $X,\ Y,\ Z$ とするとき

$$Y-X=1 \cdots\cdots ㋐ \iff X+1=Y<Z$$

であるから,㋐を満たす取り出し方は$Y=k\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$のとき,$(X,\ Y,\ Z)$は$n-k$通りあるから,総数は

$$\sum_{k=2}^{n}(n-k)=\frac{(n-1)\{(n-2)+0\}}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

である.

$$Z-Y=1 \cdots\cdots ㋑ \iff X<Y=Z-1$$

であるから,㋑を満たす取り出し方は $Y=k\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ のとき,$(X,\ Y,\ Z)$ は $k-1$ 通りあるから,総数は

$$\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)=\frac{(n-2)\{1+(n-2)\}}{2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

である.

$$\begin{cases} Y-X=1 \\ Z-Y=1 \end{cases} \iff X+1=Y=Z-1$$

を満たす取り出し方は $y=k\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ のとき,$(X,\ Y,\ Z)$ は 1 通りずつあるから,これを満たす取り出し方は

$$n-2\ (\text{通り})$$

ある.したがって,余事象となる場合の数は

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}-(n-2)=(n-2)^2$$

であり,求める確率は

$$1-\frac{(n-2)^2}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=1-\frac{6(n-2)}{n(n-1)}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$

である.

## 3

(1) 頂点,辺,面の数 $v$(vertex),$e$(edge),$f$(face) について,オイラーの多面体定理

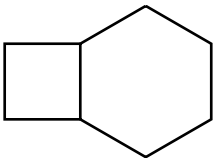
$$v-e+f=2$$

が成り立つから

$$24-36+f=2 \qquad \therefore \quad f=\mathbf{14} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) $K'$ は凸多面体であるから各頂点には 3 つ以上の面が集まる．$K'$ のある頂点において集まる面の数が 4 以上と仮定すると，面は正方形または正六角形なので，その頂点で



$$(\text{内角の総和}) \geqq \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$$

となり，不合理である．

よって，$K'$ の各頂点に集まる面の数は 3 である． …… (証明終わり)

(3) $K'$ について，頂点の数を $v'$，辺の数を $e'$，面のうち正方形である面の数を $p$，正六角形である面の数を $q$ とする．オイラーの多面体定理により

$$v' - e' + (p+q) = 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

各面をすべてバラすと，頂点の数の総和は $4p+6q$ であるが，(2) から $K'$ の頂点には 3 つの面が集まるので

$$4p + 6q = 3v' \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．また，辺の数の総和は $4p+6q$ であるが，$K'$ の辺は 2 つの面に共有されるので

$$4p + 6q = 2e' \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

$$「① \text{ かつ } ② \text{ かつ } ③」 \iff \begin{cases} v' = \dfrac{4p+6q}{3} \\ e' = \dfrac{4p+6q}{2} \\ \dfrac{4p+6q}{3} - \dfrac{4p+6q}{2} + (p+q) = 2 \end{cases}$$

第 3 式を整理すると

$$\frac{p}{3} = 2 \qquad \therefore \quad p = 6$$

よって，正方形である面の数は **6** である． …… (証明終わり)

(4) $$f' = p + q = 6 + q$$

正方形と正六角形が共有する辺の数を $s$ として，$q$ の範囲を調べる．

$$\begin{aligned} s &\leqq 4p \quad (\because \text{ 等号は正方形のすべて辺が共有辺のとき}) \\ &= 4 \times 6 \quad (\because \ (3)) \\ &= 24 \qquad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

また，1 つの頂点に集まる 3 つの面がすべて正六角形とすると，その頂点で

$$(\text{内角の総和}) = \frac{2\pi}{3} \times 3 = 2\pi$$

となり，不合理である．したがって，1 つの頂点に集まる 3 つの面の少なくとも 1 つのは正方形であり，1 つの正六角形と辺を共有する正方形は 3 個以上である．

$$3q \leqq s \qquad \cdots\cdots ⑤$$

以上，④，⑤ より

$$3q \leqq s \leqq 24 \qquad \therefore \quad q \leqq 8$$

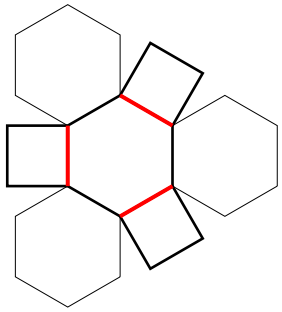
であり

$$f' \leqq 6 + 8 = 14 = f$$

すなわち

$$f \geqq f'$$

である． ……(証明終わり)



【3 − 1】

(1) 条件 (a) の正 $n$ 角形の一方を底面にとる．

上面，底面はどちらも $n$ 個の頂点があり，条件 (b) より側面は正三角形でできているから，$A_n$ の各頂点には 4 本の辺が集まっている．1 つの辺に対し，頂点は 2 個対応するから，$A_n$ の辺の数は

$$\frac{4 \times (n+n)}{2} = \boldsymbol{4n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $A_n$ は $2n+2$ 個の面をもち，条件 (b) より，頂点の個数は条件 (a) の正 $n$ 角形 2 個の頂点の個数と一致し，$n+n=2n$ 個である．オイラーの多面体定理

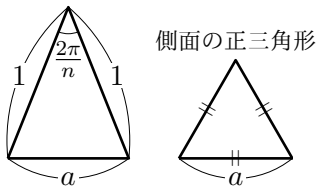
  「(頂点の数) − (辺の数) + (面の数) = 2」

  より

$$\begin{aligned}(\text{辺の数}) &= (\text{頂点の数}) + (\text{面の数}) - 2 \\ &= 2n + (2n+2) - 2 \\ &= 4n\end{aligned}$$

  である．

(2) 条件 (b) の正三角形の 1 辺の長さ $a$ は，条件 (a) の正 $n$ 角形の 1 辺の長さである．正 $n$ 角形の外接円の半径は 1 であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ とおくと




$$a = 2 \times 1 \cdot \sin\frac{\pi}{n} = 2\sin\theta$$

したがって，正三角形の高さ $h$ は

$$h = a\sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}\sin\theta} \qquad \cdots\cdots(答)$$

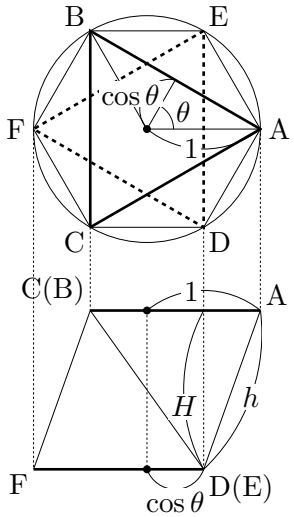
である．

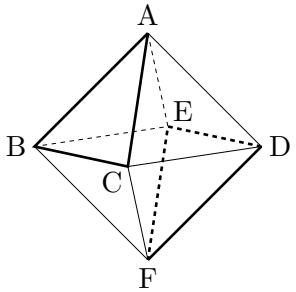
(3) 上面 (底面) の中心から辺までの距離は $\cos\theta$ であるから，$H$ は

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{h^2-(1-\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{3(1-\cos^2\theta)-(1-\cos\theta)^2} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{2+2\cos\theta-4\cos^2\theta}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- $n=3$ のときの凸多面体 $A_3$ は下図の正八面体 ABC–DEF である．正三角形 ABC，DEF を上面，底面とし，上面と底面を太線，側面を細線をして上からと横から見た図を右に示した．




(4) $A_n$ の底面の頂点を共有する正 $2n$ 角形を考え，それを底面とする高さ $H$ の正 $2n$ 角柱 $B_n$ を考える．$B_n$ の体積は

$$2n\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta\right)\cdot H = nH\sin\theta$$

である．$B_n$ において，$A_n$ の外側の部分は互いに合同な $2n$ 個の三角錐になっている．その部分の体積は

$$2n\times\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cdot(1-\cos\theta)\right\}\cdot H = \frac{2nH}{3}\sin\theta(1-\cos\theta)$$

である．よって，$A_n$ の体積 $V$ は

$$V = nH\sin\theta - \frac{2nH}{3}\sin\theta(1-\cos\theta)$$

であり

$$\frac{V}{nH} = \sin\theta - \frac{2}{3}\sin\theta(1-\cos\theta) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\sin\theta(1+2\cos\theta)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

**4**

$$f(z) = z^2+az+b$$

$$|a| \leqq 1 \cdots\cdots ①$$

$$|b| \leqq 1 \cdots\cdots ②$$

$a$, $b$ が ① かつ ② を満たしながら動くときの $f(z)=0$ …… ③ を満たす複素数 $z$ がとりうる値の範囲は,「① かつ ② かつ ③」をみたす実数 $a$, $b$ が存在するような複素数 $z$ の集合である．

$$z^2+az+b=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\overline{z}^2+a\overline{z}+b=0 \qquad \cdots\cdots ③'$$

辺々の差をとると

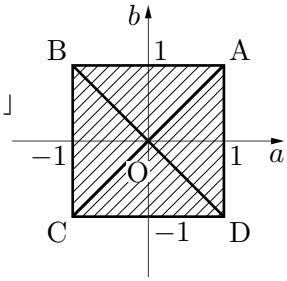
$$z^2-\overline{z}^2+a(z-\overline{z})=0$$
$$(z-\overline{z})(z+\overline{z}+a)=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

(i) $z-\overline{z}=0$ のとき

$z$ は実数であり，$ab$ 平面において ③ は直線を表す．したがって，「① かつ ② かつ ③」をみたす実数 $a,\ b$ が存在するような $z$ の条件は「$ab$ 平面において直線③と不等式 $|a|\leqq 1,\ |b|\leqq 1$ の表す領域が共有点をもつ」ことである．

A$(1,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$，C$(-1,\ -1)$，D$(1,\ -1)$ とし，$g(a,\ b)=z^2+az+b$ とすると，求める条件は




「直線①が線分 AC, BD のいずれかと共有点をもつ」

$\Longleftrightarrow$ 直線①に関して，「A, C が反対側にある」

または「B, D が反対側にある」

$\Longleftrightarrow g(1,\ 1)g(-1,-1)\leqq 0$

または $g(-1,\ 1)g(1,\ -1)\leqq 0$

$\Longleftrightarrow (z^2+z+1)(z^2-z-1)\leqq 0$ または $(z^2-z+1)(z^2+z-1)\leqq 0$

$z$ は実数であり，$z^2\pm z+1=\left(z\pm\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ (複号同順) だから，求める条件は

$$z^2-z-1\leqq 0 \text{ または } z^2+z-1\leqq 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq z\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ または } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq z\leqq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore\quad -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq z\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．

(ii) $z-\overline{z}\neq 0$ のとき

④ より

$$a=-(z+\overline{z})$$

このとき，③ より

$$b=-z^2+(z+\overline{z})z=z\overline{z}=|z|^2$$

である．したがって，「① かつ ② かつ ③」をみたす実数 $a,\ b$ が存在するような複素数 $z$ の条件は

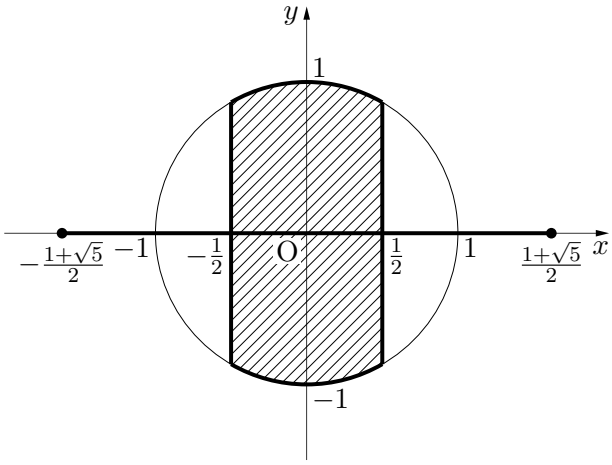
$$\begin{cases}|-(z+\overline{z})|\leqq 1\\ |z|^2\leqq 1\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqq \mathrm{Re}(z)\leqq\dfrac{1}{2}\\ |z|\leqq 1\end{cases}$$

- $z$ は，実数係数の方程式 ④ の虚数解であり，$\overline{z}$ も解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases}z+\overline{z}=-a\\ z\overline{z}=b\end{cases}$$

である．以下同じ．

(i)，(ii) より，$z$ の範囲は下図の太線および斜線部分である．




【4 − 1】 $x^2+(a+1)x+a^2-1=0 \quad \cdots\cdots (*)$

(1) $x$ の 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，判別式を $D_x$ とおくと，$D_x>0$ である．

$$D_x=(a+1)^2-4(a^2-1)=-3a^2+2a+5=-(a+1)(3a-5)$$

であるから，求める条件は

$$\boldsymbol{-1<a<\frac{5}{3}} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $a$ が範囲 ① を動くときの $(*)$ の実数解 $x$ のとりうる値の範囲は，$(*)$ を満たす $a$ が範囲 ① に存在するような $x$ の値の集合である．

$(*)$ を $a$ について整理すると

$$(*) \iff a^2+xa+x^2+x-1=0$$

$f(a)=a^2+xa+x^2+x-1$ とおき，$f(a)=0$ が範囲 ① に少なくとも一つ解をもつための $x$ の条件を求める．

$f(a)=0$ の判別式を $D_a$ とおくと

$$D_a=x^2-4(x^2+x-1)=-3x^2-4x+4=-(x+2)(3x-2)$$

であるから，$f(a)=0$ が実数解をもつための条件 $D_a \geqq 0$ は

$$-2 \leqq x \leqq \frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

である．② のとき，$y=f(a)$ の軸 $a=-\dfrac{x}{2}$ は

$$-\frac{1}{2}\cdot(-2) \geqq -\frac{x}{2} \geqq -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \qquad \therefore \quad -\frac{1}{3} \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1$$

軸は ① の範囲にある．また，端点の符号については

$$f(-1)=x^2 \geqq 0$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 \geqq 0$$

$f(-1)$，$f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ が同時に 0 となることはないから，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ の少なくとも一方は正であり，$f(a)=0$ を満たす $a$ が範囲 ① に少なくとも一つ存在する．

よって，$x$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

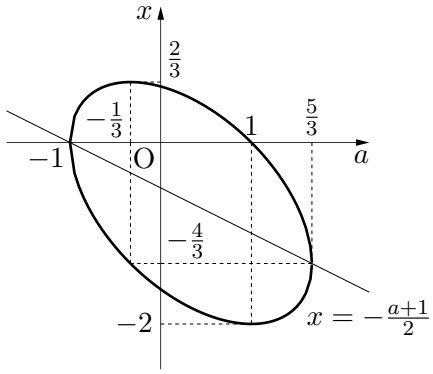
である．

- $ax$ 平面上で

$$x^2+(a+1)x+a^2-1 \ =0$$

を満たす点 $(a,\ x)$ の集合は右の太線となる．

(1)，(2) の範囲はこの図から読み取ることができる．




**5**

$$|z-1|=a \text{ かつ } z \neq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$w=\frac{z-3}{1-2z} \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ② を変形すると

$$② \iff w(1-2z)=z-3$$

$$\left(\because\ z \neq \frac{1}{2} \text{は①にあるが，右の等式からも } z \neq \frac{1}{2} \text{は確認できる}\right)$$

$$\iff (2w+1)z=w+3$$

$$\iff z=\frac{w+3}{2w+1} \quad (\because\ 2w+1 \neq 0 \text{ は確認できる})$$

である．② のとき，$z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たすから，$|z-1|=a$ を満たす $w$ の条件を求める．

$$\left|\frac{w+3}{2w+1}-1\right|=a \iff |2-w|=a|2w+1| \quad (\because\ 2w+1 \neq 0)$$

である．辺々平方すると

$$(w-2)(\overline{w}-2)=a^2(2w+1)(2\overline{w}+1)$$

$$w\overline{w}-2w-2\overline{w}+4=a^2(4w\overline{w}+2w+2\overline{w}+1)$$

$$(4a^2-1)w\overline{w}+(2a^2+2)(w+\overline{w})=4-a^2$$

$4a^2-1=(2a+1)(2a-1)$ について，$a$ は正の実数であるから $2a+1 \neq 0$ である．また，$2a-1=0$ とすると，$0w\overline{w}+\dfrac{5}{2}(w+\overline{w})=\dfrac{15}{4}$ となり，$w+\overline{w}=\dfrac{3}{2}$ である．この

ときの $w$ の描く図形 $K$ は直線であり円とはならない．円となるためには $2a-1 \neq 0$ が必要である．

$4a^2-1 \neq 0$ のときを考える．さらに変形を続け

$$w\overline{w}+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}(w+\overline{w})=\frac{4-a^2}{4a^2-1}$$

$$\left(w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right)\left(\overline{w}+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right)=\frac{4-a^2}{4\mathrm{a}^2-1}+\left(\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right)^2$$

$$\left|w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right|^2=\frac{25a^2}{(4a^2-1)^2}$$

$$\left|w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right|=\frac{5a}{|4a^2-1|} \quad (\because\ a>0)$$

これは円である，すなわち，$K$ が円となる $a$ の条件は

$$\boldsymbol{a \neq \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，このとき $K$ は

$$\textbf{中心}\ \boldsymbol{-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}},\ \textbf{半径}\ \boldsymbol{\frac{5a}{|4a^2-1|}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

の円を描く．

- $2a=1$ のとき，$w$ は 2 点 $2,\ -\dfrac{1}{2}$ から等距離にあるので，$K$ は 2 点 $2,\ -\dfrac{1}{2}$ の垂直 2 等分線となり，円ではない．
  $2a \neq 1$ のとき，$w$ は 2 点 $2,\ -\dfrac{1}{2}$ からの距離の比が $2a:1$ の点だから，$K$ は円 (アポロニウスの円) である．
  よって，$K$ が円となるための条件は $a \neq \dfrac{1}{2}$ である．

(2) $xy$ 平面で考えると，題意の線分は

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2a^2+2}{4a^2-1} & \cdots\cdots ③ \\ |y| \leqq \dfrac{5a}{|4a^2-1|} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

と表されるから，この線分が通過する領域は「③，④かつ $a>0,\ a \neq \dfrac{1}{2}$」をみたす $a$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$③ \iff (4a^2-1)x=-2a^2-2 \quad \left(\because\ a \neq \pm\frac{1}{2}\text{は確認できる}\right)$$

$$\iff (4x+2)a^2=x-2$$

$4x+2=0$ とすると $x=-\dfrac{1}{2}$ であり，$0x=-\dfrac{5}{2}$ となり，不合理．したがって，$4x+2 \neq 0$ である．このとき

$$a^2=\frac{x-2}{4x+2}$$

であり，$a>0,\ a \neq \dfrac{1}{2}$ を満たす $a$ が存在する条件は

$$\begin{cases} a>0 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-2}{4x+2}>0 \\ \dfrac{x-2}{4x+2} \neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-2)(2x+1)>0 \quad (\because \text{ 分母と分子は同符号}) \\ 4x-8 \neq 4x+2 \quad (\text{これはつねに成立する}) \end{cases}$$

$$\iff (x-2)(2x+1)>0$$

$$\therefore \quad x<-\frac{1}{2} \text{ または } 2<x \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．さらに，④ も満たす $a$ が存在する条件を求める．$a>0$ より

$$④ \iff y^2 \leqq \left(\frac{5a}{4a^2-1}\right)^2$$

であり

$$\left(\frac{5a}{4a^2-1}\right)^2 = \frac{25\cdot\dfrac{x-2}{4x+2}}{\left(4\cdot\dfrac{x-2}{4x+2}-1\right)^2} = 25\cdot\frac{x-2}{4x+2}\left(\frac{4x+2}{-10}\right)^2 = \frac{1}{2}(x-2)(2x+1)$$

だから，④ は

$$y^2 \leqq \frac{1}{2}(x-2)(2x+1)$$

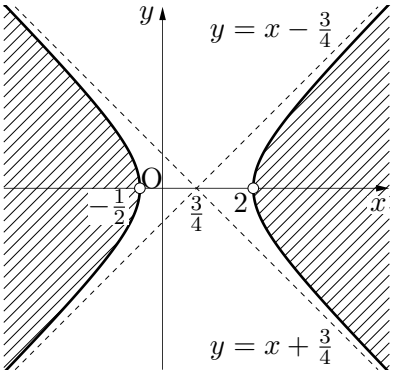
$$y^2 \leqq x^2-\frac{3}{2}x-1$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{3}{4}\right)^2-y^2 \geqq \frac{25}{16}$$

よって，$x,\ y$ の条件は

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-y^2 \geqq \dfrac{25}{16} \\ x<-\dfrac{1}{2} \text{ または } 2<x \end{cases}$$

である．

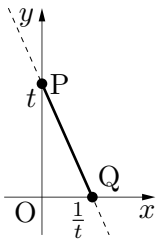



求める領域は右図の斜線部分である．境界は 2 点 $(2,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ のみ除く．

【5 − 1】$t>0$ のとき，線分 PQ は

$$\begin{cases} tx+\dfrac{y}{t}=1 & \cdots\cdots ① \\ x \geqq 0 \text{ かつ } y \geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

と表すことができる．




$t$ が $1 \leqq t \leqq 2$ …… ③ の範囲を動くときの線分 PQ の通過する領域は,「① かつ ② かつ ③」を満たす実数 $t$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$t \neq 0$ より ① は

$$xt^2 - t + y = 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

と変形できる．$f(t) = xt^2 - t + y$ とおく．

(i) $x = 0$ のとき

$$「①' \text{ かつ } ② \text{ かつ } ③」 \iff \begin{cases} t = y \\ y \geqq 0 \\ 1 \leqq t \leqq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = y \\ 1 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

求める条件は $1 \leqq y \leqq 2$ である．

(ii) $x \neq 0$ のとき

$$f(t) = xt^2 - t + y = x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 + y - \frac{1}{4x}$$

② もあわせると $x > 0$ であり，$y = f(t)$ のグラフは下に凸である．積 $f(1)f(2)$ の符号で場合分けすると,「① かつ ② かつ ③」を満たす実数 $t$ が存在する条件は

$$「x > 0 \text{ かつ } y \geqq 0」$$

のもとで

$$(ア)\ f(1)f(2) \leqq 0 \quad \text{または} \quad (イ) \begin{cases} f(1) \geqq 0 \text{ かつ } f(2) \geqq 0 \\ 1 \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq 2 \\ y - \dfrac{1}{4x} \leqq 0 \end{cases}$$

が成り立つことである．

(ア) は

$$(x - 1 + y)(4x - 2 + y) \leqq 0$$

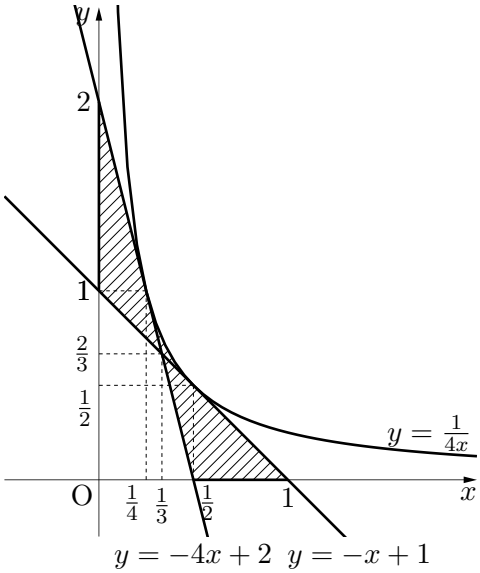
である．2 直線 $y = -x + 1$，$y = -4x + 2$ は点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ で交わる．

(イ) は

$$\begin{cases} x - 1 + y \geqq 0 \text{ かつ } 4x - 2 + y \geqq 0 \\ \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \\ y \leqq \dfrac{1}{4x} \end{cases}$$

である．$y = -x + 1$ と $y = \dfrac{1}{4x}$ は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で接し，$y = -4x + 2$ と $y = \dfrac{1}{4x}$ は点 $\left(\dfrac{1}{4},\ 1\right)$ で接する．

以上を図示すると，下図の斜線部分が得られる．境界も含む．




- ①′ を

$$y=-xt^2+t$$

とし，$x$ を固定し，$t$ を $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で動かしたときの $y$ の値域を求める．

$g(t)=-xt^2+t$ とおく．$x \geqq 0$ に注意すると

(i) $x=0$ のとき

$g(t)=t$ であり，$1 \leqq t \leqq 2$ のとき

$$g(1) \leqq y \leqq g(2) \qquad \therefore \quad 1 \leqq y \leqq 2$$

である．

(ii) $x>0$ のとき

$$g(t)=-x\left(t-\frac{1}{2x}\right)^2+\frac{1}{4x}$$

$y=g(t)$ グラフは上に凸であるから，$y=g(t)$ の $1 \leqq t \leqq 2$ における最小値は

$$y \geqq \min g(t)=\min\{g(1),\ g(2)\}=\min\{-x+1,\ -4x+2\}$$

2 直線 $y=-x+1$，$y=-4x+2$ は点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ で交わる．

最大値については

(ア) $1 \leqq \frac{1}{2x} \leqq 2$ $\left(\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$ のとき

$$y \leqq \max g(t)=g\left(\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{4x}$$

(イ) $\frac{1}{2x} \leqq 1$ $\left(\frac{1}{2} \leqq x\right)$ のとき

$$y \leqq \max g(t)=g(1)=-x+1$$

(ウ) $2 \leqq \frac{1}{2x}$ $\left(x \leqq \frac{1}{4}\right)$ のとき

$$y \leqq \max g(t)=g(2)=-4x+2$$

以上を $y \geqq 0$ に注意して，$\min g(t) \leqq y \leqq \max g(t)$ を図示すると解答の斜線部分を得る．

- ①′ は

$x = 0$ のとき

$$y = t$$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき，$1 \leqq y \leqq 2$ である．

$x \neq 0$ のとき

$$y = -xt^2 + t = -x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 + \frac{1}{4x}$$

と変形でき，この直線 $y = -t^2x + t$ と曲線 $y = \dfrac{1}{4x}$ を連立すると

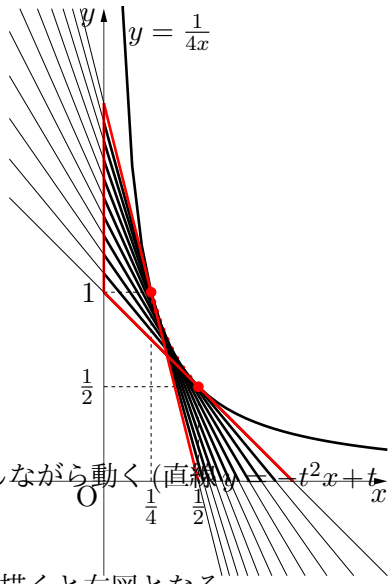
$$-x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4x}$$

$$\therefore \quad -x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 = 0$$

$x \neq 0$ より

$$x = \frac{1}{2t} \quad (\text{重解})$$

であり，線分 PQ は曲線 $y = \dfrac{1}{4x}$ に $x = \dfrac{1}{2t}$ で接しながら動く（直線 $y = -t^2x + t$ は曲線 $y = \dfrac{1}{4x}$ の包絡線である）．

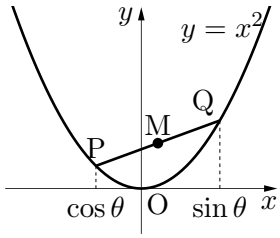



$t$ を $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で動かしながら線分 PQ を描くと右図となる．

【5 − 2】

(1) 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$，$\mathrm{Q}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$ の中点の $x$ 座標が $t$ であるから

$$t = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$




$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より $\sin\theta \neq \cos\theta$ であり，直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}(x - \cos\theta) + \cos^2\theta$$

$$\therefore \quad y = (\sin\theta + \cos\theta)x - \sin\theta\cos\theta$$

① より

$$(2t)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{4t^2 - 1}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．①，②より

$$\text{直線 PQ}: \boldsymbol{y = 2tx - \frac{4t^2 - 1}{2}} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 線分 PQ の長さ $L$ は

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2} \\ &= \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2(\sin\theta+\cos\theta)^2} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} (\sin\theta-\cos\theta)^2 &= 1-2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1-(4t^2-1) \quad (\because \text{②}) \\ &= -4t^2+2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(-4t^2+2)+(-4t^2+2)4t^2} \\ &= \sqrt{-16t^4+4t^2+2} \\ &= \sqrt{-16\left(t^2-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

である．ここで

$$t=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots \text{④}$$

$$\therefore\quad 0\leqq t^2\leqq\frac{1}{4}$$

である．

よって，$L$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\sqrt{2}\leqq L\leqq\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) から，$L$ が最大値をとるのは

$$t^2=\frac{1}{8} \qquad \therefore\quad t=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

のときであり

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{2}$$

$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ より

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$$

よって，求める $\theta$ の値 は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 2 点 $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \cos^2\theta\right)$，$\mathrm{Q}\left(\sin\theta,\ \sin^2\theta\right)$ は共に $y = x^2$ 上にあるから，線分 PQ の通過領域は，直線 PQ の通過領域と領域 $y \geqq x^2$ の共通部分である．

$\theta$ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くときの直線 PQ の通過する領域は,「③ かつ ④」を満たす実数 $t$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

直線 PQ の方程式 ③ は

$$4t^2 - 4xt + 2y - 1 = 0$$

と変形される．$f(t) = 4t^2 - 4xt + 2y - 1$ とおくと

$$f(t) = 4\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 - x^2 + 2y - 1$$

である．$f(t) = 0$ が ④ の範囲で実数解を持つ条件は

$$(\mathrm{i})\ f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right) \leqq 0 \quad \text{または} \quad (\mathrm{ii})\ \begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \geqq 0 \text{ かつ } f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \geqq 0 \\ -\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{1}{2} \\ -x^2 + 2y - 1 \leqq 0 \end{cases}$$

(i) のとき

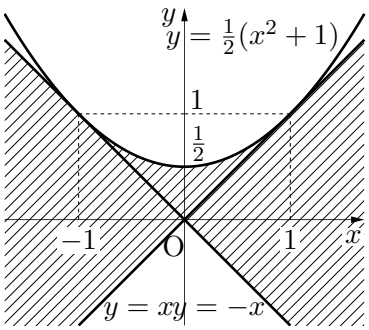
$$(2x + 2y)(-2x + 2y) \leqq 0$$
$$\therefore\quad (y + x)(y - x) \leqq 0$$

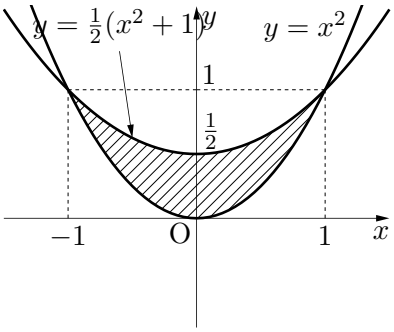
(ii) のとき

$$\begin{cases} x + y \geqq 0 \text{ かつ } -x + y \geqq 0 \\ -1 \leqq x \leqq 1 \\ y \leqq \dfrac{1}{2}(x^2 + 1) \end{cases}$$

(i) または (ii) を図示すると下左図の斜線部分となる．

求める領域はこれを $y \geqq x^2$ のもとで図示すればよく，下右図の斜線部分となる．どちらも境界はすべて含む．



- ③ を

$$y = -2t^2 + 2xt + \frac{1}{2}$$

と変形し，$x$ を固定し，$t$ を $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ の範囲で動かし，$y$ の動く範囲を求める．

$g(t) = -2t^2 + 2xt + \frac{1}{2}$ とおく．

$$g(t) = -2\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$y = g(t)$ のグラフは上に凸であり，最小値は

$$\min g(t) = \min\left\{g\left(-\frac{1}{2}\right),\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \min\{-x,\ x\}$$

最大値は

(i) $\frac{x}{2} \leqq -\frac{1}{2}$ $(x \leqq -1)$ のとき

$$\max g(t) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -x$$

(ii) $-\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{1}{2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ のとき

$$\max g(t) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

(iii) $\frac{x}{2} \geqq \frac{1}{2}$ $(x \geqq 1)$ のとき

$$\max g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = x$$

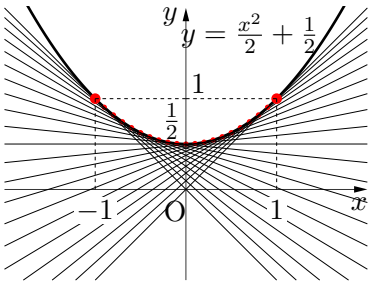
$\min g(t) \leqq y \leqq \max g(t)$ を図示すると，解答の左図を得る．

- $y = 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2} = -2\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ であり，直線 $y = 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2}$ と放物線 $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ を連立すると

$$-2\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$-2\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore\quad x = 2t \text{ (重解)}$$




であり，直線 $y = 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2}$ は放物線 $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ に $x = 2t$ で接しながら動く (直線 $y = 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2}$ は放物線 $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ の包絡線である)．

$t$ が $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ の範囲で動かしながら直線を動かすと右図となる．

**6**

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \end{cases}$$

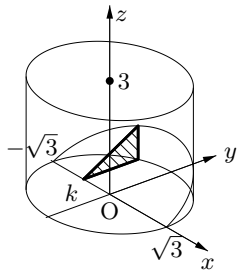
(1)

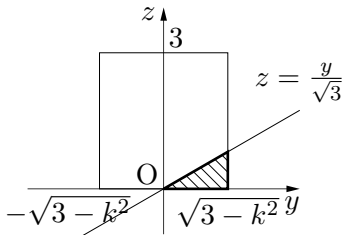
$$D_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ \sqrt{3}z \leqq y \end{cases}$$

$D_1$ の平面 $x = k$ による切り口 $D_1(k)$ を考える．

$$D_1(k) : \begin{cases} y^2 \leqq 3 - k^2 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ z \leqq \dfrac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

であり，切り口が存在するのは $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$ のときであり，切り口 $D_1(k)$ は下の右図となる．




切り口 $D_1(k)$ の面積 $S_1(k)$ は

$$S_1(k) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - k^2} \cdot \frac{\sqrt{3 - k^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3 - k^2)$$

であるから，$D_1$ の体積 $V_1$ は

$$V_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}(3 - k^2)\,dk = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ 3k - \frac{k^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 切り方を変えてみる．

  $D_1$ を平面 $y = t$ で切ると

$$D_1(t) : \begin{cases} x^2 \leqq 3 - t^2 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ \sqrt{3}z \leqq t \end{cases}$$

  であり，切り口が存在するためには，第 1 の不等式より

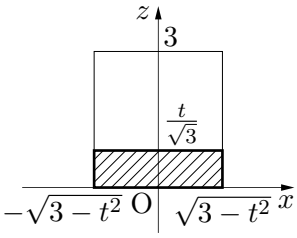
$$3 - t^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}$$

  が必要であり，このとき

$$-1 \leqq \frac{t}{\sqrt{3}} \leqq 1$$

であるから，第 2，第 3 の不等式も考えると

$$\begin{cases} -\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}} \geqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$$




のとき存在する．このとき，不等式は

$$D_1(t) : \begin{cases} x^2 \leqq 3 - t^2 \\ 0 \leqq z \leqq \dfrac{t}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

となるから，切り口は右図の斜線部分となる．

面積 $S_1(t)$ は

$$S_1(t) = 2\sqrt{3-t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} t\sqrt{3-t^2}$$

であるから，$D_1$ の体積 $V_1$ は

$$V_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} t\sqrt{3-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-t^2} \frac{(3-t^2)'}{-2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{2}{3} (3-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} 3^{\frac{3}{2}} = 2$$

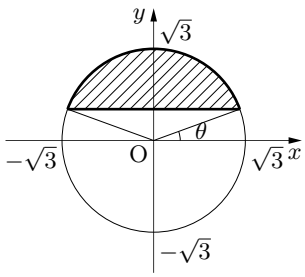
である．

- $D_1$ を平面 $z = u$ で切ると

$$D_1(u) : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ 0 \leqq u \leqq 3 \\ \sqrt{3}u \leqq y \end{cases}$$

であり，切り口が存在する条件は

$$\begin{cases} 0 \leqq u \leqq 3 \\ \sqrt{3}u \leqq \sqrt{3} \end{cases} \qquad \therefore \quad 0 \leqq u \leqq 1$$




であり，このとき不等式は

$$D_1(u) : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ \sqrt{3}u \leqq y \end{cases}$$

である．$u = \sin\theta \ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことができる．

このとき斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2(\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}\cos\theta \cdot \sqrt{3}\sin\theta$$

$$= \frac{3}{2}(\pi - 2\theta - \sin 2\theta)$$

体積 $V_1$ は $du = \cos\theta\, d\theta$ に注意すると

$$V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}(\pi - 2\theta - \sin 2\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\pi\cos\theta - 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\cos\theta\}\, d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos\theta\,d\theta = \Big[\pi\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\cos\theta\,d\theta = \Big[2\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\,d\theta = \pi - \Big[-2\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin 3\theta + \sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

求める体積 $V_1$ は

$$V_1 = \frac{3}{2}\left\{\pi - (\pi - 2) - \frac{2}{3}\right\} = 2$$

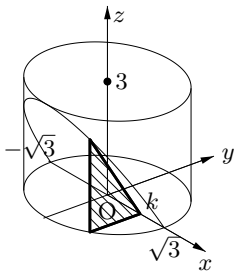
である．

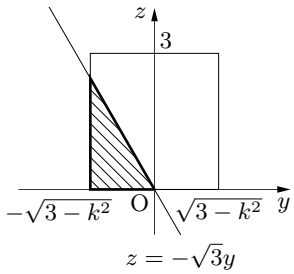
(2)
$$D_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 3 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ z \leqq -\sqrt{3}y \end{cases}$$

$D_2$ の平面 $x = k$ による切り口 $D_2(k)$ を考える．

$$D_2(k) : \begin{cases} y^2 \leqq 3 - k^2 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ z \leqq -\sqrt{3}y \end{cases}$$

であり，切り口が存在するのは $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$ のときであり，切り口は右図の斜線部分となる．




切り口 $D_2(k)$ の面積 $S_2(k)$ は

$$S_2(k) = \frac{1}{2}\sqrt{3-k^2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{3-k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(3-k^2)$$

であるから，$D_2$ の体積 $V_2$ は

$$V_2 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}(3-k^2)\,dk = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left[3k - \frac{k^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $D$ の平面 $x = k$ による切り口 $D(k)$ を考える．

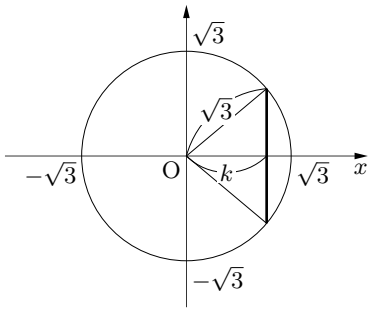
$yz$ 平面上の直線 $l : y + \sqrt{3}z = 0,\ x = 0\ \left(z = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}y,\ x = 0\right)$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分は直線 $l$ を軸とする半径 $\sqrt{3}$ の円柱である．この円柱を $C'$ とすると，$D$ は $C$ と $C'$ の共通部分である．

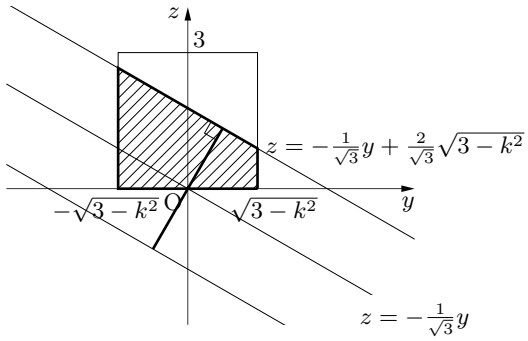
$C'$ を平面 $x=k$ で切ると切り口は直線 $l'$ : $y+\sqrt{3}z=0$, $x=k$ からの距離が $\sqrt{3-k^2}$ の 2 直線に挟まれた領域となる．

したがって，平面 $x=k^{(}-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3})$ による切り口 $D(k)$ は

$$D(k):\begin{cases}-\sqrt{3-k^2}\leqq y\leqq\sqrt{3-k^2}\\ 0\leqq z\leqq 3\\ -\dfrac{y}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-k^2}\leqq z\leqq-\dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-k^2}\end{cases}$$

であり，$D$ の平面 $x=k$ による切り口は下の右図の斜線部分となる．




切り口の面積は

$$S(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3-k^2}}{\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{3-k^2}}{\sqrt{3}}\right)\cdot 2\sqrt{3-k^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}(3-k^2)$$

であるから，$D$ の体積 $V$ は

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}(3-k^2)\,dk=2\times\frac{4}{\sqrt{3}}\left[3k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3}=\mathbf{16}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

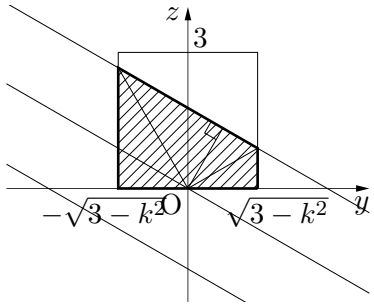
- 右図より，$D(k)$ の面積 $S(k)$ は

$$S(k)=2(S_1(k)+S_2(k))$$

であり，求める体積 $V$ は

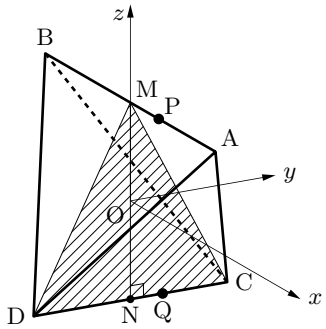
$$\begin{aligned}V&=2(V_1+V_2)\\&=2(2+6)\\&=16\end{aligned}$$

である．




【6 − 1】

(a) 線分 AB 上の点 P を固定し，点 Q を線分 CD 上で動かすと，線分 PQ 上の点が通過し得る領域は三角形 PCD になる．ついで，点 P を線分 AB 上で動かすと，三角形 PCD 上の点が通過し四面体 ABCD となる．これが領域 $S$ である．




本問の四面体 ABCD は $yz$ 平面，$zx$ 平面に関して対称である．線分 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とすると，その座標は M(0, 0, 1)，N(0, 0, $-1$) であり，MN $\perp$ CD である．

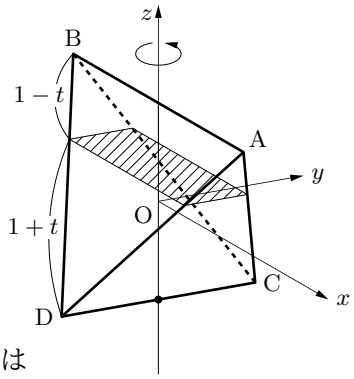
よって，$S$ の体積は

$$\begin{aligned}&2\times(\text{四面体 AMCD の体積})\\&=2\times\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MCD}\cdot\mathrm{AM}\\&=2\times\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)\cdot1\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(b) $z$ 軸の周りに $S$ を回転させてできる立体を $R$ とする．




$R$ の平面 $z=t$ $(-1\leqq t\leqq1)$ による切り口は $S$ と平面 $z=t$ $(-1\leqq t\leqq1)$ との共通部分 $R_t$ を $z$ 軸のまわり回転させてできる図形である．

$R_t$4 つの線分 AC, AD, BC, BD を $(1-t):(1+t)$ の比に分けた 4 点を頂点とする四角形で，$R_t$ は $yz$ 平面と $zx$ 平面に関して対称である．

ここで，線分 AC を $(1-t):(1+t)$ の比に分けた点は

$$\begin{aligned}&\frac{(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{(1+t)+(1-t)}\\&=\frac{(1+t)(1,\ 0,\ 1)+(1-t)(0,\ 1,\ -1)}{2}\\&=\left(\frac{1+t}{2},\ \frac{1-t}{2},\ t\right)\end{aligned}$$

であるから，$z$ 軸の周りに $R_t$ を 1 回転させてできる円の面積は

$$\pi\left\{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2+\left(\frac{1-t}{2}\right)^2\right\}=\frac{t^2+1}{2}\pi$$

である．よって，$R$ の体積は

$$\pi\int_{-1}^{1}\frac{t^2+1}{2}\,dt=2\times\pi\int_{0}^{1}\frac{t^2+1}{2}\,dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$$

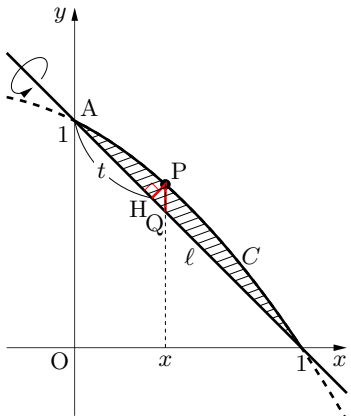
……(答)

である．

【6 − 2】 $C : y = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

$\ell : y = 1 - x$

(1) $f(x)$ は $C$ 上の点 $\mathrm{P}\left(x,\ -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1\right)$ と $\ell : x + y - 1 = 0$ との距離であるから




$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left| x + \left(-\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1\right) - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\
&= \frac{\left| \dfrac{1}{2}(x - x^2) \right|}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(x - x^2) \quad (\because\ 0 \leqq x \leqq 1) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\}
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)$ は $x = \dfrac{1}{2}$ のとき

最大値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{16}}$ ……(答)

をとる．

(2) 点 P から直線 $\ell$ に下した垂線の足を H とし，点 A(0, 1) から H までの距離を $t$ とする．このとき，求める体積 $V$ は

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi \mathrm{PH}^2\, dt = \pi \int_0^1 \{f(x)\}^2 \frac{dt}{dx}\, dx$$

ここで，P から $x$ 軸に下ろした垂線と $\ell$ との交点を Q とすると，△PQH は直角二等辺三角形であるから

$$t = \mathrm{AQ} - \mathrm{QH} = \sqrt{2}x - \mathrm{PH} = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - x^2) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x^2 + 3x)$$

$$\therefore\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{4}(2x + 3)$$

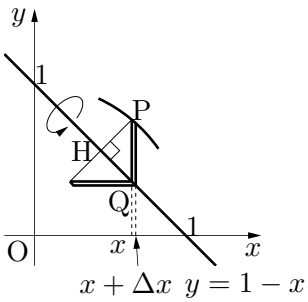
よって

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}(x - x^2) \right\}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(2x + 3)\, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \int_0^1 (x - x^2)^2 (2x + 3)\, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \int_0^1 (2x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2)\, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \left[ \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 1 + 1 \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \cdot \frac{2}{15} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{240}\pi}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．

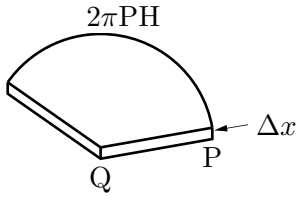
- $\Delta x$ が十分小さいとき，幅が $\Delta x$ の板が回転してできる円錐を切り開くと，右下図のような扇形が得られる．この扇形の弧の長さは円錐の底円の周の長さと一致するから




$$2\pi \mathrm{PH}$$

であり，微小体積 $\Delta V$ は

$$\begin{aligned}
\Delta V &= (\text{扇形の面積}) \cdot \Delta x \\
&= \frac{1}{2}(\text{扇形の弧の長さ})\mathrm{PQ} \cdot \Delta x \\
&= \frac{1}{2} 2\pi \mathrm{PH} \cdot \mathrm{PQ} \cdot \Delta x \\
&= \pi \mathrm{PQ} \cos \frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{PQ} \cdot \Delta x \\
&\qquad (\because\ \triangle \mathrm{PQH} \text{ は直角二等辺三角形}) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \mathrm{PQ}^2 \Delta x
\end{aligned}$$




であるから，求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left\{ \left( -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) - (1 - x) \right\}^2 dx \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left( -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{30} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{240} \pi
\end{aligned}$$

である．