第2章 確　　率

目　標　17世紀，パスカル，フェルマーの賭事の問題に端を発し確率論は発展する．ラプラスにより"同様の確からしさ"を基礎におく古典的確率論が大成したのは18世紀である．その後も確率論は発展し，有限の立場を越え，今日はコロモゴロフによる公理的確率論として大樹をなしている．我々が扱うのはラプラス流の確率論であり，順列・組合せの理論が必要である．

この章では，次のテーマを扱う．

Ⅰ．確率の計算	**Ⅱ．条件つき確率**
Ⅲ．独立試行	**Ⅳ．確率と漸化式**

Ⅰ．確 率 の 計 算

1°　**数学的確率**　ある試行において，起こりうるすべての場合（根元事象）の数がNで，どの場合も"同様に確からしい"とする．事象Aの起こる場合の数がaのとき

$$\textbf{Aが起こる確率}\quad P(\mathrm{A})=\frac{a}{N}$$

$0\leqq P(\mathrm{A})\leqq 1$ であり，全事象の確率 $P(\Omega)=1$，空事象の確率 $P(\phi)=0$

2°　**加法定理**　$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

A，Bが排反（$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\phi$）なら $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$

また，
$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})-P(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})+P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$$

A，B，Cが（どの2つも）互いに排反なら
$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})$$

3°　**余事象**　Aの起こらない事象を$\overline{\mathrm{A}}$とすると
$$P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})$$
場合分けが多くなるとき，「少なくとも……」のとき，など余事象を考えてみるとよい．

標問 26. 〈同様に確からしい〉

3つのさいころを同時に振って出た目の数を3辺のそれぞれの長さとする三角形を考える.

(1) 正三角形となる確率 p_1 を求めよ.

(2) 正三角形でない二等辺三角形となる確率 p_2 を求めよ.

(京都産業大)

精講 3つの目の出方としては $\{a,\ a,\ a\}$, $\{a,\ a,\ b\}$, $\{a,\ b,\ c\}$ の3つのタイプがあり

(ア) $\{a,\ a,\ a\}$ …… ${}_6C_1=6$ 通り

(イ) $\{a,\ a,\ b\}$ …… ${}_6P_2=30$ 通り

(ウ) $\{a,\ b,\ c\}$ …… ${}_6C_3=20$ 通り

の合計56通りの出方が考えられるが, これらを根元事象にとるわけにはいかない. **“同様に確からしい”** とはいえないからである. 3つのさいころを区別すると目の出方は $6^3=216$ 通り考えられ, 順列で数えることになる. (ア)は問題ない. (イ)は根元事象としては $(a,\ a,\ b)$, $(a,\ b,\ a)$, $(b,\ a,\ a)$ を区別し, ${}_6P_2\times3=90$ 通り考えられる. 同じく(ウ)も ${}_6C_3\times3!\,(={}_6P_3)=120$ 通りである.

確率の計算においては, まず“同様に確からしい”根元事象からなる標本空間をキチンと設定しなければいけない.

解答 (1) 正三角形となるのは3辺が 1, 2, ……, 6の6通りがある.

$$\therefore\quad p_1=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}\qquad\cdots\cdots(答)$$

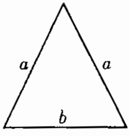
(2) 正三角形でない二等辺三角形となるのは $\{a,\ a,\ b\}$ のとき.

$\{2,\ 2,\ b\}$, $b=1,\ 3$

$\{3,\ 3,\ b\}$, $b=1,\ 2,\ 4,\ 5$

$\{a,\ a,\ b\}$, $a\geqq4$, $1\leqq b\,(\fallingdotseq a)\leqq6$

$$\therefore\quad p_2=\frac{(2+4+3\cdot5)\times3}{6^3}=\frac{63}{6^3}=\frac{7}{24}\qquad\cdots\cdots(答)$$



$0<b<2a$

(これは三角形となる条件)

標問 27.　〈樹形図の活用〉

座標平面上で原点 (0, 0) から出発した点Pが次の規則に従って動くものとする．すなわち，さいころを振って奇数の目が出たら $(x,\ y)$ から $(x+1,\ y+1)$ へ，偶数の目が出たら $(x,\ y)$ から $(x+1,\ y-1)$ へ移るものとする．いま，さいころをN回振るものとし，そのときに通る点Pの座標を $(1,\ Y_1)$, $(2,\ Y_2)$, ……, $(N,\ Y_N)$ とする．

(1)　$N=5$ とする．Y_n $(1\leqq n\leqq 5)$ のうちに正のものがちょうど3個ある確率は $\dfrac{\boxed{}}{2^5}$ である．

(2)　$N=5$ とする．Y_n $(1\leqq n\leqq 5)$ がすべて正である確率は $\dfrac{\boxed{}}{2^5}$ である．

(3)　$N=6$ とする．Y_n $(1\leqq n\leqq 5)$ がすべて正であり，かつ $Y_6=0$ である確率は $\dfrac{\boxed{}}{2^6}$ である．

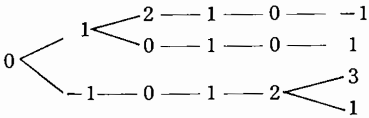
(4)　$N=8$ とする．Y_n $(1\leqq n\leqq 7)$ がすべて正であり，かつ $Y_8=0$ である確率は $\dfrac{\boxed{}}{2^8}$ である．

(5)　$N=8$ とする．Y_n $(1\leqq n\leqq 8)$ がすべて正である確率は $\dfrac{\boxed{}}{2^8}$ である．　　　　（慶　大）

精講

場合の数を数えるのに順列・組合せの利用が多いが本問のように樹形図をかくものもある．

(1)　y 座標のみを取り出していくと



の4通り

$$\therefore\ \frac{4}{2^5}$$

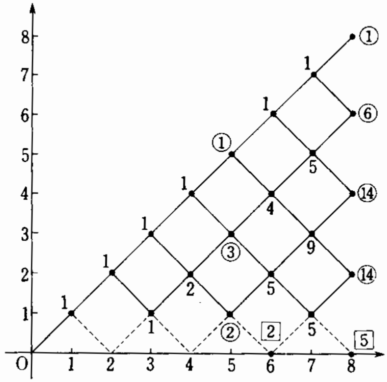
(2)〜(5)　$Y_n>0$ となる経路を樹形図をかくと右図のようになり，それぞれの確率は

(2)　$\dfrac{2+3+1}{2^5}=\dfrac{6}{2^5}$

(3)　$\dfrac{2}{2^6}$

(4)　$\dfrac{5}{2^8}$

(5)　$\dfrac{14+14+6+1}{2^8}=\dfrac{35}{2^8}$



解答　(1) 4　(2) 6　(3) 2　(4) 5　(5) 35

研究　要するに y 軸上の移動をとらえればよいわけである．(2)などは 1+1−1+1+1 といったタイプが題意を満たすものである．これを 4 つの 1 を先に並べ，−1 の位置を後に入れると考えると，−1 の場所としては右図中段のように 3 か所あり，その 1 つに入れることになる．他の場合も考えて

1　1　1　1　1

1　1 ∧ 1 ∧ 1 ∧

1　1 ∧ 1 ▲ ∧

$$\therefore\quad 1+{}_3C_1+{}_2C_1=6$$

(3)〜(5)も同じように数えられるが，だんだんメンドウになる．

例えば，(5)は −1 が 0 個，1 個，2 個，3 個の 4 通りの場合を上のように考えて

$$1+6+({}_5C_2+4)+({}_4C_3+5\cdot 2)=35$$

▶演　習◀

【29】 平面上で座標 $(l,\ m)$ に位置する点Pは，1 秒後に 4 個の点

$$(l+1,\ m),\ (l-1,\ m),\ (l,\ m+1),\ (l,\ m-1)$$

のうちの 1 点にそれぞれ確率 $\dfrac{1}{4}$ で移るとする．

(1)　はじめ原点にある点Pが n 秒後に移り得る点の個数を求めよ．

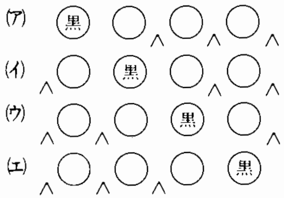
(2)　はじめ原点にある点Pが n 秒後に原点に移る確率を p_n として，p_4，p_5，p_6 を求めよ．

（青山学院大）

標問 28.　〈隣り合わない〉

白球3個，赤球3個，黒球1個の入った箱から，1個ずつ取り出して1列に並べるとき，白球と黒球が隣り合わせにならない確率を求めよ．　（創価大）

解答　赤球○と黒球㊜を並べた後，白球を並べると，下の4タイプがあり，白球を入れられるのは∧の3か所である．∧には白球を複数個入れてよく，入れる個数で場合分けすると



$\{3,\ 0,\ 0\}$ タイプ……3通り

$\{2,\ 1,\ 0\}$ タイプ……6通り

$\{1,\ 1,\ 1\}$ タイプ……1通り

7個の並べ方の総数は $\dfrac{7!}{3!3!}=140$ であるから

$$\frac{10\times4}{140}=\frac{2}{7}$$ ……(答)

研究

［別解1］　重複組合せを使うと3タイプの場合分けは不要．3種類の∧の重複を許した3個の取り方と考えて

$$\frac{{}_3H_3\times4}{140}=\frac{2}{7}$$

［別解2］　余事象を考え，全体から隣り合わせになる場合を引く．(白黒)を1つとみて，(黒白)また(白黒白)のダブリに注意すると

$$\frac{7!-({}_3C_1\cdot6!\times2-{}_3P_2\cdot5!)}{7!}=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

（同色の球も区別し 7! 個の標本空間を考えている．）

▶演　習◀

【30】　5個の文字A，B，C，D，Eを1列に並べる順列を考える．次のおのおのの値を求めよ．

(1)　異なる並べ方の総数

(2)　AがBより左にある確率

(3)　AがBより左にあって，同時にAがDより左にある確率

(4)　AとBが隣り合わせにならない確率　（東京農大）

標問 29.　〈出合いの問題〉

互いに識別できる9枚のカードを1列に並べてある．それを集めてよく混ぜ合わせ，もう一度1列に並べなおすとき，そのうちの4枚がどれももとの位置にあり，残りの5枚がどれももとの位置にないように並ぶ確率を求めよ．　　(立命館大)

解答　9枚のカードの並べ方　$9!$

もとの位置にくる4枚のカードの選び方　${}_9C_4$

残り5枚の順列を調べる．それぞれを 1, 2, 3, 4, 5 とすれば

$$f(a) \neq a \quad (a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

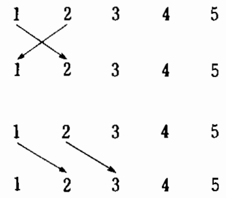
となる写像（置換）の総数を数えればよい．

$$f(1)=a \quad (a=2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

に対し，$f(a)=1$，$f(a)\neq 1$ で場合分けすると

$$4\{2+3\cdot(1+2)\}=44$$

$$\therefore\ \frac{{}_9C_4\cdot 44}{9!}=\frac{11}{720} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$



研究　1°「トランプ A(1), 2, 3, ……, K(13) をよく切って1列に並べるとき，並んだ順番が1枚もそのトランプの番号と一致しない確率は？」を出合いの問題といい，モンモールが1708年に提出したものである．これを5枚のカードに変えたのが本問である．

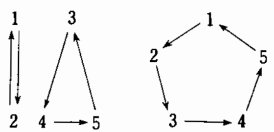
2°　n 枚のカードを並べかえるとき，n 枚すべてがもとの位置にない並べ方を n 枚の**攪乱順列**（**完全順列**）という．その総数を D_n とすると，$f(1)=a$ に対し，$f(a)=1$，$\neq 1$ の場合分けから次の漸化式を得る．

$$D_n=(n-1)\cdot(D_{n-2}+D_{n-1})$$

$D_1=0$，$D_2=1$ ゆえに，順次 $D_3=2$，$D_4=9$，$D_5=4(2+9)=44$ が得られる．なお，$D_0=1$ とおくと $D_n=n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ を導くことができる．

3°　D_5 は次のように考えてもよい．1が2の位置にくることを $1\to 2$ とすれば，タイプは右の2つしかない．その数は

$${}_5C_2\times 2+(5-1)!=44$$



標問 30. 〈異なる色の確率〉

赤，青，黄，緑色の色球が各色3個ずつあり，各色の球は，さらにA，B，Cの文字を1字ずつ書き入れて区別してある．この色球合計12個を1つの箱に無作為に入れて，この箱から任意に4個を取り出すとき，

(1)　4個とも異なる色の球がそろう確率を求めよ．

(2)　A，B，Cのすべての文字がそろう確率を求めよ．

(3)　4個とも異なる色の球で，かつ，A，B，Cのすべての文字がそろう確率を求めよ．（徳島文理大）

精講

(1)　右表の各列から1個ずつ取る．

(2)　3つの行から2個，1個，1個と取ればよい．

(3)　Aの行から2個を取り，Bの行からはAで取った色とダブらない2個のうちから1個を取る．

	赤	青	黄	緑
A	○	○	○	○
B	○	○	○	○
C	○	○	○	○

解答　(1)　$\dfrac{3^4}{{}_{12}C_4}=\dfrac{3^4}{11\cdot 9\cdot 5}=\dfrac{9}{55}$　……(答)

(2)　A，B，Cのいずれかは2つであり，Aを2つとすると ${}_4C_2\cdot 4^2$

$$\therefore\ \frac{3\times{}_4C_2\cdot 4^2}{{}_{12}C_4}=\frac{3\cdot 6\cdot 4^2}{11\cdot 9\cdot 5}=\frac{32}{55}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2)と同じく考え，Aが2つのときは ${}_4C_2\cdot 2!$

$$\frac{3\times{}_4C_2\cdot 2!}{{}_{12}C_4}=\frac{3\cdot 6\cdot 2}{11\cdot 9\cdot 5}=\frac{4}{55}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

▶演　習◀

【31】　赤，青，白，黒4色の同質で同じ大きさの玉が，それぞれ10個ずつ合計40個1つの袋に入っている．いま無心に3個取り出すとき，

(1)　それらが3個とも赤である確率は$\boxed{}$である．

(2)　それらが3個とも同色である確率は$\boxed{}$である．

(3)　それらが3個ともちがった色である確率は$\boxed{}$である．（岐阜女大）

【32】　Gakkishiken という11文字がある．3文字を取り出すとき，少なくとも2文字が同じである確率を求めよ．（名古屋学院大）

標問 31. 〈大小の確率〉

1から $n(n\geqq 3)$ までの番号のついたカードが1枚ずつある．もとにもどすことなくカードを3回引き，それらの番号を順に，a，b，c とする．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 相異なる引き方は何通りあるか．

(2) $a<b$ となる引き方は何通りあるか．

(3) $a<b<c$ となる確率を求めよ．

(4) $a<c<b$ となる確率を求めよ．　(愛知教育大)

解答 (1) ${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$ 通り ……(答)

(2) a，b となる数の組合せは ${}_nC_2$ 通りあり，c の取り方は $n-2$ 通り

$${}_nC_2(n-2)=\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \text{ 通り} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) a，b，c の組合せから，$a<b<c$ となる順列が1つできる．

$$\frac{{}_nC_3}{{}_nP_3}=\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) (3)と同様に $\dfrac{1}{6}$ ……(答)

研究 1° (2)は，(1)の引き方のうち，$a<b$ と $b<a$ の個数が同数であることに着目すると $\dfrac{{}_nP_3}{2}$

2° a，b，c の順列は $a<b<c$，$a<c<b$，$b<a<c$，$b<c<a$，$c<a<b$，$c<b<a$ の6通りであり，これらは同程度に起こる．

したがって，(3)，(4)はどちらも $\dfrac{1}{6}$ と考えてもよい．

▶演　習◀

【33】 (1) さいころを3回投げて出た目の数を順に，a，b，c とする．$a<b<c$ となる確率を求めよ．　(京都産業大)

(2) UNIVERSITY の10文字を1列に並べたとき，（U，N，I）および（T，Y）の順番がこのままである確率を求めよ．　(共立女大)

標問 32.　〈加法定理〉

(1)　3個のさいころを投げるとき，出た目の数の和が偶数であるという事象をA，少なくとも1つ6の目が出るという事象をBとする．次の(i)〜(iv)の各事象の起こる確率を求めよ．

(i)　A　(ii)　B　(iii)　$A\cap B$　(iv)　$A\cup B$

（京都府大）

(2)　$P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cap B)=x$ のとき，

$$\{P(\overline{A}\cup B)\}^2\leqq P(\overline{A}\cap B)$$

が成り立つ x の範囲を求めよ．　（神奈川大）

解答　(1)　(i)　3つとも偶数か，2つ奇数で1つ偶数の場合であるから

$$\frac{3^3+{}_3C_2\cdot3^2\cdot3}{6^3}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(答)$$

(ii)　余事象を考えて　$1-\dfrac{5^3}{6^3}=\dfrac{91}{216}$　……(答)

(iii)　3つとも偶数で少なくとも1つは6であるのは　$3^3-2^3=19$

2つ奇数で1つは6であるのは　${}_3C_2\cdot3^2\cdot1=27$

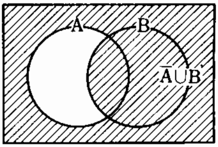
$$\therefore\ \frac{19+27}{6^3}=\frac{23}{108}\quad\cdots\cdots(答)$$

(iv)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{17}{24}$　……(答)

(2)　排反なものに分けていくと

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(A\cap B)=\frac{1}{2}+x$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-x$$

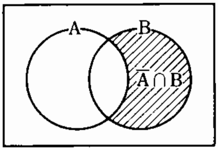


題意より　$\left(\dfrac{1}{2}+x\right)^2\leqq\dfrac{1}{3}-x$

$$\therefore\ 12x^2+24x-1\leqq0$$

$0\leqq x\leqq1$ に注意して

$$0\leqq x\leqq\frac{\sqrt{39}-6}{6}\quad\cdots\cdots(答)$$



研究

1° (1) (i) 1つのさいころに偶数と奇数は同じだけあるから，3つのさいころの目の和を調べても偶数と奇数は同じだけあり $\frac{1}{2}$ となるのは当然.

2° 排反な2つの事象に分けると

(1) (iii) $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})-P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})$

$$=\frac{1}{2}-\Bigl(\underbrace{\frac{2^3}{6^3}}_{\text{〔2 or 4 の偶数3つ〕}}+\underbrace{\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 2\cdot 3^2}{6^3}}_{\text{〔2 or 4 の偶数1つ奇数2つ〕}}\Bigr)=\frac{1}{2}-\frac{31}{108}=\frac{23}{108}$$

(1) (iv) $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{B})+P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=\frac{91}{216}+\frac{31}{108}=\frac{17}{24}$

3° 和事象の計算は加法定理のほかに

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\quad(\text{排反})$$
$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\overline{\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}})=1-P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})\quad(\text{余事象})$$

とすることもできる.

4° 積事象については次節で扱う乗法定理 $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ が基本であるが，加法定理を書きかえたり，次のように変形したりもできる.

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})-P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\quad(\text{排反})$$
$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\overline{\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}})=1-P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})\quad(\text{余事象})$$

▶演　習◀

【34】 2つの事象E，Fがあって $P(\mathrm{E})=\frac{1}{2}$, $P(\mathrm{F})=\frac{1}{4}$, $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=\frac{1}{6}$ のとき，次の事象の確率を求めよ.

(1) $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$　(2) $\mathrm{E}\cap\overline{\mathrm{F}}$　(3) $\overline{\mathrm{E}}\cap\overline{\mathrm{F}}$　(山口大医療短大)

【35】 事象A，B，Cに対し

$$P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})=p,$$
$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})+P(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})=q,$$
$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=r$$

とおくとき，次の各確率を p, q, r を用いて表せ.

(1) 少なくとも1つの事象の起こる確率

(2) 少なくとも2つの事象の起こる確率

(3) どの事象も起こらない確率　(宮崎大)

標問 33. 〈「少なくとも…」は余事象〉

3つのさいころを同時に投げるとき，

(1) 「1の目が少なくとも1つ含まれている」確率は $\dfrac{\boxed{}}{216}$，

(2) 「3つとも奇数の目で，1の目が少なくとも1つ含まれている」確率は $\dfrac{\boxed{}}{216}$，

(3) 「3つの目の積が8の倍数となる」確率は $\dfrac{\boxed{}}{216}$ である．

（東京薬大）

精講 「少なくとも……」ときたら，余事象を考えてみる．

(1)
$$1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216}$$

(2) 奇数だけの組合せは 3^3 通り，そのうち1を含まないものは 2^3 通り

$$\therefore\ \frac{3^3-2^3}{6^3}=\frac{19}{216}$$

(3) 8の倍数とならないのは，3つとも奇数，2つ奇数で1つ偶数，1つ奇数で2つ偶数（4を含まない）のときであるから，

$$1-\frac{3^3+{}_3C_2\cdot 3^2\cdot 3+{}_3C_1\cdot 3\cdot 2^2}{6^3}=\frac{72}{216}\ \left(=\frac{1}{3}\right)$$

解答 (1) 91　(2) 19　(3) 72

▶演　習◀

【36】 A，B，C 3人が廊下を歩いていき，途中にある2つの部屋X，Yのどちらかに入るか，またはどちらにも入らずに行き過ぎてしまう．各人は他人とは無関係に確率 $\dfrac{1}{3}$ で部屋Xに入り，確率 $\dfrac{1}{3}$ で部屋Yに入るものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) Xに誰も入らない確率は$\boxed{}$である．

(2) Xに誰も入らないが，Yには少なくとも1人が入る確率は$\boxed{}$である．

(3) 誰も入らない部屋がある確率は$\boxed{}$である．　　（東京薬大）

Ⅱ．条件つき確率

1°　条件つき確率　事象Aが起こったときに事象Bが起こる確率を条件つき確率といい，$P_A(B)$ あるいは $P(B|A)$ で表す．

$$P(A) \neq 0 \text{ ならば } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2°　乗法定理　$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

$$P(A \cap B \cap C) = P\{(A \cap B) \cap C\} = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

3°　事象の独立　2つの事象A，Bにおいて

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

が成り立つとき，AとBは独立である，または独立事象であるという．

〚**参考**〛　3つの事象A，B，Cが独立であるとは

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

のすべてが成り立つことをいう．

標問 34.　〈条件つき確率〉

(1)　1つの試行によって起こる2つの事象A，Bに対し，

$$P(A) = \frac{1}{3},\quad P_B(A) = \frac{1}{4},\quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}$$

のとき，$P(B) = \boxed{}$ である．　（愛媛大）

(2)　1，2，3，4 の番号をつけたカードが1枚ずつ合計4枚ある．これらのカードから無作為に3枚のカードを取り出して横に1列に並べる．このとき

（ⅰ）　左端のカードが1でないという条件のもとに，「中央のカードが1である」条件つき確率は$\boxed{}$である．

（ⅱ）　左端のカードは1でなく，右端のカードは4でないという条件のもとに，「中央のカードが1である」条件つき確率は$\boxed{}$である．　（東京薬大）

精講

条件つき確率のポイントは，標本空間（全事象）を改めてとりなおすという点にある．

	B	$\overline{\mathrm{B}}$
A	a	b
$\overline{\mathrm{A}}$	c	d

右の図で $n(\Omega)=a+b+c+d=N$ とすると

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{N}\div\frac{a+b}{N}=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$ となる．

(1)　$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{1}{4}$ より $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{4}P(\mathrm{B})$，また

$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}})=1-(P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}))$$

$$\therefore\ 1-\left(\frac{1}{3}+P(\mathrm{B})-\frac{1}{4}P(\mathrm{B})\right)=\frac{1}{3}\qquad\therefore\ P(\mathrm{B})=\frac{4}{9}$$

［別の方法］ $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=a$，$P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=b$，$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=c$，$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=d$ とすれば，条件はすべてこれで表される．

$a+b=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{a}{a+c}=\dfrac{1}{4}$，$d=\dfrac{1}{3}$，$a+b+c+d=1$ から $a=\dfrac{1}{9}$，$c=\dfrac{1}{3}$ を求め，$P(\mathrm{B})=a+c$ を計算してもよい．

(2)　左端のカードが1でない事象をA，中央のカードが1である事象をB，右端のカードが4でない事象をCとする．

（i）　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\dfrac{P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2}{{}_4\mathrm{P}_3}\div\dfrac{3\cdot{}_3\mathrm{P}_2}{{}_4\mathrm{P}_3}=\dfrac{1}{3}$

（ii）　$P_{\mathrm{A}\cap\mathrm{C}}(\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}=\dfrac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}=\dfrac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{A})-P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}})}$

$$=\frac{2\cdot2}{{}_4\mathrm{P}_3}\div\left(\frac{3\cdot{}_3\mathrm{P}_2}{{}_4\mathrm{P}_3}-\frac{2\cdot2}{{}_4\mathrm{P}_3}\right)=\frac{2}{7}$$

解答　(1) $\dfrac{4}{9}$　(2)（i）$\dfrac{1}{3}$　（ii）$\dfrac{2}{7}$

研究

(2)　条件つき確率の定義から考えなおしてみる．

（i）　左端が1でない並べ方は 3·3·2 通り，そのうち中央が1であるのは 3·1·2 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3\cdot1\cdot2}{3\cdot3\cdot2}=\dfrac{1}{3}$

（ii）　左端が1でなく右端が4でない並べ方は，左端が4であるかないかで分けて $1\cdot3\cdot2+2\cdot2\cdot2=14$ 通りあり，そのうち中央が1であるのは $2\cdot1\cdot2=4$ 通り．よって，求める確率は $\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}$

標問 35. 〈優勝の確率〉

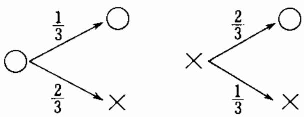
2つのチームA，Bが何回か試合をし，どの試合にも引き分けはないものとする．Aチームが第1試合に勝つ確率を a とする．第2試合以後の試合では，直前の試合でAが勝ったときは，この試合でAが勝つ確率を $\dfrac{1}{3}$ とし，また直前の試合でAが負けたときは，この試合で負ける確率も $\dfrac{1}{3}$ とする．どちらか先に3勝したチームを優勝とするとき，

(1)　第4試合までにAチームが優勝する確率を求めよ．

(2)　Aチームが優勝する確率を求めよ．　(岐阜大)

精講

与えられた条件は，第 k 試合で勝つ事象を A_k とすると



$$P_{A_k}(A_{k+1})=\frac{1}{3},\quad P_{\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}})=\frac{1}{3}$$

右の図式を頭にえがきながら，乗法定理を使っていく．

解答　(1)　第3試合で優勝が決まるのは

$$○○○\qquad \therefore\ a\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

第4試合で優勝は　○○×○，○×○○，×○○○　であるから

$$a\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+(1-a)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

よって，
$$\frac{a}{9}+\frac{4a+4a+2(1-a)}{27}=\frac{9a+2}{27}\qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　たかだか5試合で優勝は決まる．第5試合で優勝が決まるのは

○○××○，○×○×○，○××○○

×○○×○，×○×○○，××○○○

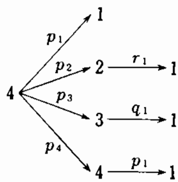
となるときであり，求める確率は

$$\underbrace{\frac{9a+2}{27}}_{〔上の3つの合計〕}+\underbrace{\left(\frac{8}{27}a+\frac{6}{27}(1-a)\right)}_{〔下の3つの合計〕}=\frac{11a+8}{27}\qquad \cdots\cdots(答)$$

標問 36.　〈ジャンケンの確率〉

4人でジャンケンをして，ただ1人の勝者を選び出したい．1回目でただ1人が勝つ確率は(ア)［　　］である．そうでないときは，2回目は1回目で負けた人を除いてジャンケンを続けるものとすると，2回目でただ1人が勝つ確率は(イ)［　　］となる．　(明治大)

精講　4人のジャンケンで n 人が勝つ確率を p_n，3人，2人のジャンケンで1人が勝つ確率を q_1，r_1 とする．



"誰" が "どの手" でと考えて

$$p_1=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27},\quad p_2=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{6}{27}$$

$$p_3=\frac{{}_4C_3\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27},\quad p_4=1-(p_1+p_2+p_3)=\frac{13}{27}$$

$$q_1=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{3^3}=\frac{1}{3},\quad r_1=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{3^2}=\frac{2}{3}$$

よって，2回目にただ1人勝つ確率は

$$p_2\cdot r_1+p_3\cdot q_1+p_4\cdot p_1=\frac{6}{27}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{3}+\frac{13}{27}\cdot\frac{4}{27}=\frac{196}{729}$$

解答　(ア) $\frac{4}{27}$　(イ) $\frac{196}{729}$

研究　p_4 を直接計算してみよう．4人とも同じ手を出す場合が3通り，違う手が全部出る場合は ${}_4C_2\cdot3!$ 通り．

$$\therefore\quad \frac{3+{}_4C_2\cdot3!}{3^4}=\frac{13}{27}$$

また，ジャンケンの回数が多くなると，漸化式が有効的（標問108）である．

▶演　習◀

【37】 3人でジャンケンをくり返して，1人の勝者が決まるまで続けることにする．負けた人は次の回から参加しないものとして次の確率を求めよ．

(1) 1回のジャンケンで1人の勝者が決まる確率

(2) ジャンケンを2回行って，初めて1人の勝者が決まる確率

(3) ジャンケンを2回行って，ちょうど2人が残る確率　(青山学院大)

標問 37.　〈くじ引きは公平〉

10本のくじの中に3本の当たりくじと1本のチャンスくじとがある．チャンスくじを引いたときは引き続いてもう一度引くものとする．甲，乙の順でくじを引くとき，それぞれの当たりくじを引く確率を求めよ．

ただし，1回に1本ずつくじを引き，引いたくじはもとにもどさないとする．　(法政大)

解答　甲：1本目で当たるか，チャンスくじを引いて次に当たるかだから

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$　……(答)

乙：甲がはじめに当たって，乙も当たる確率　$\frac{3}{10}\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\right)$

甲がチャンスくじで，乙が当たる確率　$\frac{1}{10}\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\right)$

甲が1本目に外れて，乙が当たる確率　$\frac{6}{10}\left(\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}\right)$

合計して　$$\frac{240}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{3}$$　……(答)

研究　甲と乙の確率が同じになったのは偶然ではない．n本中r本の当たりくじがある場合，何番目に引いても当たる確率は同じである．次のように考えればよい．

n人の人が順にくじを引くということは，n本のくじを1列に並べるのと同じである．この方法は$n!$通りある．このうちk番目に当たりくじがある並べ方は，$r\times(n-1)!$通りある（はじめにk番目に当たりくじを置くと考える）．よってk番目の人の当たる確率は$\frac{r(n-1)!}{n!}=\frac{r}{n}$で，$k$に無関係である．

本問の場合，チャンスくじは実は無効くじとみるとわかりよい．これを引いたら，それはなかったことにして次を引く，と考えるのである．すると，10本を1列に並べると考えたとき，チャンスくじを数えずに，1番目に当たりくじがあれば甲は当たり，2番目に当たりくじがあれば乙は当たりとなる．9本中3本が当たりだから，確率はともに$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，とすぐに出る．

標問 38.　〈ポリアの壺〉

(1) 袋の中に，5個の白球と，3個の黒球が入っている．これから1個を取り出し，それが白球ならばさらに白球1個を加えてもとにもどし，それが黒球ならばさらに黒球を1個加えてもとにもどす．次に，1個を取り出すとき，それが白球である確率を求めよ．　（常葉学園大）

(2) 白玉4個と赤玉6個が入っている箱の中から任意に3個の玉を取り出し，印をつけてもとにもどす．次に，この箱の中から任意に1個の玉を取り出したとき，それが印のついた赤玉である確率はいくらか．　（静岡大）

解答 (1) 1個目に取り出した球が白球か黒球かで場合分けして

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 印のついた赤玉の出方は，次の3通り．

i）赤玉3個　ii）赤玉2個，白玉1個　iii）赤玉1個，白玉2個

$$\therefore\ \frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_3}\cdot\frac{2}{10}+\frac{{}_6C_1\cdot{}_4C_2}{{}_{10}C_3}\cdot\frac{1}{10}$$

$$=\frac{60+120+36}{10\cdot3\cdot4\cdot10}=\frac{9}{50} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究

1° 袋の中に a 個の白球と b 個の黒球が入っている．これから1個ずつを取り出す際，白球が出たらさらに白球を α 個加えてもどし，黒球が出たらさらに黒球を β 個加えてもどすことにする．k 回目に白球を取り出す確率 p_k を考えるとき，

$\alpha=\beta=0$ ならさいころの問題，

$\alpha=\beta=-1$ ならくじ引きの問題であり，どちらも

$$p_1=p_2=p_3=\cdots\cdots$$

である．本問(1)は $\alpha=\beta=1$ のときであり，「ポリアの壺の問題」と呼ばれるものである．実は $\alpha=\beta$ であれば

$$p_1=p_2=p_3=\cdots\cdots$$

はいつも成り立つ．数学的帰納法を使えば証明できよう．

2°　条件のつかみ方　「印のついた赤玉」を「3個取った玉の中に赤玉が含まれておりそれに印をつけたもの」と考えると解答のようになるが，これがもし「白玉40個と赤玉60個が入っている箱の中から任意に30個の玉を取り出し，……」となっていたらどうしよう．もうお手上げである．

そこで次のように考える．赤玉を取るという事象をA，印のついた玉を取るという事象をBとすると

$$P(\mathrm{A})=\frac{6}{10},\quad P(\mathrm{B})=\frac{3}{10}$$

一方，求める確率は

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

であるが，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B})$ であること，すなわち，AとBが独立事象であること（☞標問 **47**）は明らかであるから

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})=\frac{6}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}$$

とすればよい．

▶演　習◀

【38】　以下のゲームについて答えよ．箱の中に赤玉4個，白玉3個が入っている．箱の中から玉を1個ずつ順に7個すべてを取り出す．

例＼順	1	2	3	4	5	6	7
A	赤	白	赤	白	白	赤	赤
B	赤	白	赤	白	赤	白	赤

このとき途中のいずれかの時点で，取り出した玉について，白玉の個数が赤玉の個数より多ければ負けである．逆に途中のどの時点であっても白玉の個数が赤玉の個数より多くなければ勝ちである．例Aでは負けで，この場合5個取り出した時点で負けが確定する．例Bでは勝ちである．

(1)　3個取り出したときに初めて負けが確定する確率を求めよ．（1個または2個取り出した時点で負けが確定する確率を除く．）

(2)　このゲームで勝つ確率を求めよ．　（福岡女大）

【39】　袋の中に白球黒球が5個ずつ入っている．これから無作為に1球取り出し，それが白球ならばもどさず，黒球ならば黒球を2個つけ加えてもどすことにする．これをくり返すとき，3回目に取り出された球が白球である確率，黒球である確率をそれぞれ求めよ．　（大阪歯大）

標問 39.　〈樹形図の活用〉

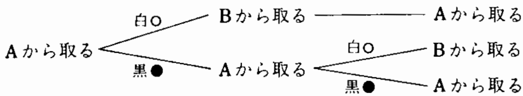
A，B 2つの箱に白石と黒石が入っている．箱A，Bから石を1個取り出すとき，白石が出る確率をそれぞれ α, β とする．次のような試行を行う．ただし，取り出した石はそのつどもとの箱にもどすものとする．

1回目は箱Aから取る．2回目は，1回目に白石が出た場合は箱Bから，黒石の場合は箱Aから取る．3回目は，2回目に箱Aから白石を取った場合のみ箱Bから，それ以外の場合は箱Aから取る．

(1)　白石を取り出した回数が黒石を取り出した回数より大きい確率 p を求めよ．

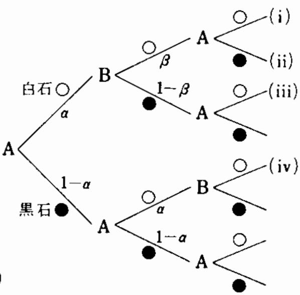
(2)　$\alpha=\dfrac{1}{4}$ のとき，どんな確率 β に対しても，$p\neq\dfrac{1}{2}$ であることを証明せよ．　　　　（名　大）

精講　石の取り出し方を正確につかむことが大切．そのために樹形図をかくとよいだろう．



解答　(1)　右の樹形図の(ⅰ)～(ⅳ)の場合である．(ⅰ)，(ⅱ)をまとめて

$$p=\alpha\beta+\alpha(1-\beta)\alpha+(1-\alpha)\alpha\beta$$
$$=\alpha^2+2\alpha\beta-2\alpha^2\beta$$
……(答)



(2)　$\alpha=\dfrac{1}{4}$ のとき，

$$p=\frac{6\beta+1}{16}\leqq\frac{6\cdot1+1}{16}\quad(\because\ \beta\leqq1)$$

$$=\frac{7}{16}<\frac{1}{2}\qquad\therefore\ p\neq\frac{1}{2}$$

標問 40.　〈樹形図の活用〉

A，B 2人がそれぞれ袋の中に球を5球ずつ入れている．それらの球は色のちがい以外には触れても区別できない．A，Bがそれぞれ無作為に袋の中から1球ずつ取り出し，取り出した球を交換しておのおのの袋の中に入れるという試行をくり返す．初めにAの袋には赤球が3個，白球が2個，Bの袋には赤球が2個，白球が3個入っている．

(1)　このとき次の確率を求めよ．

(ア)　第1回の試行の後，それぞれの袋に入っている赤，白の球の数が試行前と同じである確率

(イ)　第2回の試行の後，Aの袋に赤球が5個入っている確率

(ウ)　第3回の試行の後，Aの袋に赤球が5個入っている確率

(2)　この試行をくり返して，A，Bいずれかの袋が赤球ばかりになったとき，試行を止めて，赤球ばかりの袋をもっている人の勝ちとする．第4回目まで（4回目を含む）の試行において，A，Bそれぞれの勝つ確率を求めよ．　（大阪教育大）

解答　(1)　(ア)　A，Bともに赤または白を取り出すときであるから

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{25} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(イ)　最初のAの状態を $\begin{pmatrix}\text{赤}\\ \text{白}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ で表すと第2回の試行で $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ となるのは次の通り．

$$A:\ \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{25}\cdot\dfrac{1}{25}=\dfrac{4}{625}$　……(答)

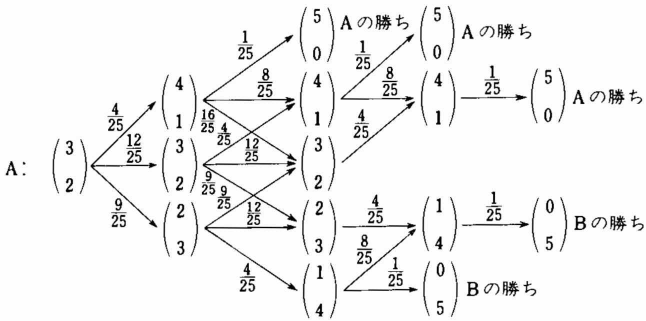
(ウ)

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \arrow[dr, "\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}"] & & \\
A:\ \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \arrow[ur, "\frac{4}{25}"] \arrow[dr, "\frac{12}{25}"'] & & \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \arrow[r, "\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}"] & \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \arrow[ur, "\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}"'] & &
\end{tikzcd}$$

よって，求める確率は

$$\frac{4}{25}\cdot\frac{8}{25}\cdot\frac{1}{25}+\frac{12}{25}\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{25}=\frac{16}{3125}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)



A，Bそれぞれの勝つ確率は

$$\mathrm{A}：(イ)+(ウ)+\left\{\frac{4}{25}\left(\frac{8}{25}\cdot\frac{8}{25}+\frac{16}{25}\cdot\frac{4}{25}\right)+\frac{12}{25}\left(\frac{4}{25}\cdot\frac{8}{25}+\frac{12}{25}\cdot\frac{4}{25}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{9}{25}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{4}{25}\right\}\times\frac{1}{25}=\frac{6296}{5^8}\ \left(=\frac{6296}{390625}\right)\quad\cdots\cdots(答)$$

$$\mathrm{B}：\frac{9}{25}\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{25}+\left\{\frac{12}{25}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{4}{25}+\frac{9}{25}\left(\frac{12}{25}\cdot\frac{4}{25}+\frac{4}{25}\cdot\frac{8}{25}\right)\right\}\times\frac{1}{25}=\frac{2052}{5^8}\cdots\cdots(答)$$

▶演　習◀

【40】　2つの袋A，Bがある．Aには赤球3個，白球2個が，Bには赤球2個，白球3個が入っている．

(1)　Aから球を1個取り出してBに入れ，次にBから球を1個取り出したとき，それが赤球である確率を求めよ．

(2)　Aから球を1個取り出してBに入れ，次にBから球を1個取り出す．さらにAから球を1個取り出してBに入れ，次にBから球を1個取り出す．このとき，Bから取り出した球2個がともに赤球である確率を求めよ．

(3)　Aから球を2個取り出してBに入れ，次にBから球を2個取り出す．このとき，Bから取り出した球2個がともに赤球である確率を求めよ．

（横浜国大）

標問 41. 〈トーナメント〉

A，B，C，Dの4チームが次の方式で試合を行って優勝チームを決める．まず抽選によって2チームずつ2組に分かれて試合をし，その勝者同士で試合をして，勝った方を優勝チームとする．

なお，どの試合にも引き分けはなく，実力が同じチームが試合をしたときに一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であり，強いチームが弱いチームと試合をしたときに強いチームが勝つ確率は $\frac{3}{5}$ であるとする．

(1)　4チームの実力が同じであるとする．このとき

(i)　AとBが試合をする確率は$\boxed{}$である．

(ii)　Aが優勝する確率は$\boxed{}$である．

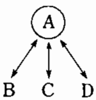
(2)　AとB，CとDはそれぞれ実力が同じであるが，A，BはC，Dより強いとする．このとき

(i)　AとBが試合をする確率は$\boxed{}$である．

(ii)　Aが優勝する確率は$\boxed{}$である．　（共通1次試験）

精講

(1)　(i)　1回戦，優勝戦でA，Bが対戦するのを分けて



$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

(ii)　Aが2連勝するときで $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$（実力が同じだから当然!!）

(2)　(1)と同じように場合分けしていく．

(i)　$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{25+18}{75}=\frac{43}{75}$$

(ii)　$$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}_{\text{〔1回戦でAB対戦〕}}+\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)}_{\text{〔1回戦でAとC or D対戦〕}}=\frac{1}{10}+\frac{54}{250}=\frac{79}{250}$$

解答　(1)(i) $\frac{1}{2}$　(ii) $\frac{1}{4}$　(2)(i) $\frac{43}{75}$　(ii) $\frac{79}{250}$

標問 42.　〈2連勝ゲーム・無限試行の確率〉

2つのチームA，Bが試合をして，第3回戦までにABAの順に勝ったものとする．この時点で，次の各場合の確率を求めよ．ただし1回の試合で各チームの勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする．

(1)　先に3回勝った方が優勝という規約のとき，Aが優勝する確率

(2)　先に2連勝した方が優勝という規約のとき，第 n 回戦までに勝負がつく確率

(3)　(2)と同じ規約のとき，勝負のつくまで試合を続けるとしてAが優勝する確率　　　　(関西大)

精講　1°　(2)は余事象を考えればよい．

2°　無限試行の確率を正直に計算しようとするとAが優勝するのは第4回戦以降勝つのが

A，BAA，BABAA，BABABAA，……

となるときで，求める確率は無限等比級数の和を求めることになる．

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\cdots=\frac{2}{3}$$

無限試行となるには最初の状態にもどって同じことのくり返しとなるはず．ここのところをうまく利用すると和の計算はさけられる．

解答　(1)　ABA $\begin{cases}\text{A}\\\text{BA}\end{cases}$ となるときであるから

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(2)　余事象を考えて　$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$　……(答)

(3)　ABA の状態からAが優勝する確率を p とおくと

ABA $\begin{cases}\text{A}\quad(\text{Aの優勝})\\\text{B A}\quad(\text{最初の状態})\end{cases}$

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}p\qquad\therefore\quad p=\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots(答)$$

標問 43. 〈到達の確率〉

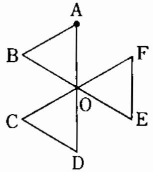
1辺の長さ 1cm の正六角形 ABCDEF の対角線の交点をOとする．3つの正三角形 OAB, OCD, OEF の辺でできている図形上を毎秒 1cm で進む動点Pがある．Pが頂点にくるたびに，次に進む辺（あともどりも含めて）をそれぞれ等しい確率で選ぶとき，

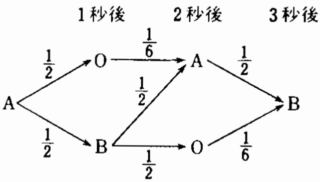
(1)　PがAを出発して3秒後にBに達する確率を求めよ．

(2)　PがOを出発して4秒後にAに達する確率を求めよ．

（同志社大）

解答　(1)





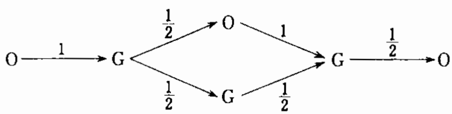
求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{24}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(2)　4秒後にO以外の点にPがある確率は等しいから

$$P(\mathrm{A})=\frac{1}{6}(1-P(\mathrm{O}))$$

O以外の頂点をGで表すと，Pが4秒後にOにある経路は



ここで，G→Gとなるとき，行き先のGはもとのGとは異なる点とする．

$$\therefore\quad P(\mathrm{O})=1\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

求める確率 $P(\mathrm{A})$ は

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{48}\qquad\cdots\cdots(答)$$

▶演　習◀

【41】 以下の図1，2のように，いくつかの，同じ長さの有向線分とその端点（A，B，C，……）からできている図がある．

点QはAから出発して，次の約束のもとに矢印の向きに沿って移動するものとする．

Qがどれかの端点にあるとき，

（i）その点を始点とする有向線分があれば必ず移動するものとし，どの有向線分を選んで移動するかの確率が定まっている．例えばBで有向線分 BC を選んでCへ移動する確率が $\frac{1}{2}$ であれば $P(\mathrm{B}\to\mathrm{C})=\frac{1}{2}$ のように表す．

（ii）その点を始点とする有向線分がなければ，その点で停止する．

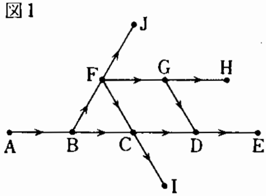
(1)　Qが図1上を動くものとし，

$P(\mathrm{B}\to\mathrm{C})=P(\mathrm{F}\to\mathrm{J})=\frac{1}{2}$,

$P(\mathrm{G}\to\mathrm{H})=\frac{1}{3}$

とする．さらに，$P(\mathrm{F}\to\mathrm{C})$ と $P(\mathrm{C}\to\mathrm{D})$ は等しいものとし，その値を p とおく．

図1



$p=\frac{1}{3}$ とすると，$P(\mathrm{F}\to\mathrm{G})=\boxed{}$ であり，QがAからEに達する確率は$\boxed{}$である．

また，$p=\boxed{}$ とすると，QがAからEに達する確率は $\frac{5}{24}$ である．

(2)　Qが図2上を動くものとし，

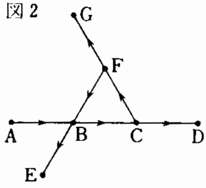
$P(\mathrm{B}\to\mathrm{C})=\frac{1}{2}$，$P(\mathrm{C}\to\mathrm{D})=\frac{2}{3}$,

$P(\mathrm{F}\to\mathrm{G})=\frac{1}{2}$

とする．さらに，Qが1秒ごとに1つの有向線分を動くものとする．

このとき，QがAから出発して7秒以内にDに達する確率は$\boxed{}$である．

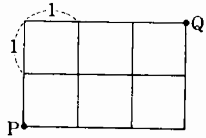
図2



（共通1次試験）

標問 44. 〈出会いの確率〉

図のような碁盤状の街路をA君はP点からQ点へ，B君はQ点からP点へ向かって互いに独立に最短経路を歩いていく．隣り合う交差点間の距離は1で，B君の歩く速さは1である．またB君は考えられる10通りの経路のうちの1つをQにおいて等確率で選びA君と同時に出発する．A君は速さkで歩き，選択の余地のある交差点に到着するごとに銅貨を振ってどちらの道を進むかを決める．ただし，銅貨を振るのに要する時間は無視する．

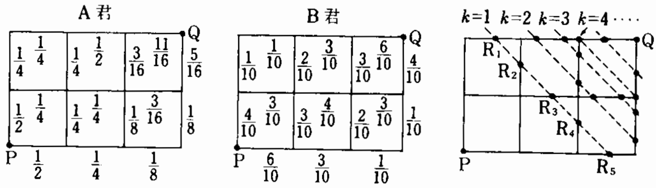


(1)　$k=1$ のときA君とB君が出会う確率はいくらか．

(2)　出会う確率を最大にする正整数kの値を求めよ．

（防衛医大）

解答　A君，B君が各経路を通る確率は下図のようになる．



(1)　$k=1$ のとき，A君とB君が出会うのは $R_1\sim R_5$ のいずれかである．

$$P(k=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}=\frac{17}{80}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)　$k\geqq2$ でA君とB君が出会うのは上図右の場合である．

$$P(k=2)=P(k=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}=\frac{11}{40}$$

$$P(k\geqq4)=\frac{11}{16}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{10}=\frac{43}{80}$$

よって，出会う確率が最大となるのは　$k\geqq4$　　　　$\cdots\cdots$(答)

標問 45.　〈原因の確率・ベーイズの定理〉

外見の同じ3つの箱A，B，Cがある．A箱には赤球10個と白球5個，B箱には白球8個と黒球3個，C箱には黒球6個と赤球2個が入っている．ある箱より1球取り出すとき，次の問いに答えよ．ただし各箱が選ばれるのと，各箱の各球が選ばれるのは同程度に確からしいとする．

(1)　B箱から白球を取り出す確率を求めよ．

(2)　黒球を取り出した場合，選んだ箱がC箱である確率を求めよ．　　　　(日本大)

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{8}{11}=\dfrac{8}{33}$　　……(答)

(2)　黒球を選ぶ事象をK，B箱，C箱を選ぶ事象をB，Cとすると

$$P(\mathrm{K})=P(\mathrm{B}\cap\mathrm{K})+P(\mathrm{C}\cap\mathrm{K})=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{11}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8}=\frac{15}{44}$$

求める確率　$P_{\mathrm{K}}(\mathrm{C})=\dfrac{P(\mathrm{K}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{K})}=\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{8}\right)\div\dfrac{15}{44}=\dfrac{11}{15}$　　……(答)

研究　(2)は事象Kが起こったという条件のもとに，Kよりも時間的には先に起こる事象Cの確率――“原因の確率”――を求めている．次の定理が基本的．条件つき確率と考え，標本空間を変えればよい．

〖**ベーイズの定理**〗　事象A_1，A_2，……，A_n は互いに排反で，これらの和が全事象となるとき，事象Bが起こった原因が A_i である確率は

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_i)=\frac{P(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$$

$$=\frac{P(\mathrm{A}_i)P_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}_1)P_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B})+P(\mathrm{A}_2)P_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B})+\cdots\cdots+P(\mathrm{A}_n)P_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B})}$$

▶演　習◀

【42】　ある事件Kにおいて証人AとBは，その事件Kが起こったといい，証人Cは起こらなかったと述べた．いま証人A，B，Cが真実を語る確率がそれぞれ $\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{5}{7}$，$\dfrac{8}{9}$ であるならば，事件Kが実際に起こっている確率は $\boxed{}$ である．ただし事件Kの起こる確率と，起こらない確率は等しいものとする．　　　　(早　大)

標問 46.　〈原因の確率〉

ジョーカーを除いたトランプ52枚の中から1枚のカードを抜き出し，表を見ないで箱の中にしまった．そして残りのカードをよくきってから3枚を抜き出したところ，3枚ともダイヤであった．このとき箱の中のカードがダイヤである確率はいくらか．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（早　大）

精講　1枚目のカードがダイヤである事象をA，残り51枚のカードから抜き出した3枚がダイヤである事象をBとすると求める確率は

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\frac{P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{51}\mathrm{C}_3}}{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{51}\mathrm{C}_3}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{{}_{13}\mathrm{C}_3}{{}_{51}\mathrm{C}_3}}=\frac{10}{49}$$

と原因の確率として計算できる．しかし次のように考えることもできる．52枚のカードからダイヤ3枚を除いた49枚のうちどのカードが箱にしまわれたのかは同様に確からしいから，求める確率は

$$\frac{10}{49}$$

解答　ダイヤのカードを当たりとする52本のくじ引きと考える．2，3，4 番目が当たりくじであるとき，1番目も当たりくじである確率が求める確率である．順列を考えて

$$\frac{13-3}{52-3}=\frac{10}{49}$$　……(答)

▶演　習◀

【43】白球9個，赤球3個計12個の球の入った袋がある．いま，この袋から1個ずつ順に3回球を取り出したとき（取り出した球はもとにもどさないものとする），3回目に取り出した球が白である確率は［　　］である．また，3回目に取り出した球が白であるときに1回目に取り出した球も白であった確率は［　　］である．　　　　　　　　　　　　（浜松医大）

標問 47.　〈事象の独立〉

$n(n\geqq2)$ 個の正しい硬貨を同時に投げるとき，“少なくとも $n-1$ 個裏が出る”という事象をA，“少なくとも1個表が出るが全部表ではない”という事象をBとすると，確率 $P(\mathrm{A})=$ (ア)$\boxed{}$，$P(\mathrm{B})=$ (イ)$\boxed{}$，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$ (ウ)$\boxed{}$である．

また，事象AとBの独立性，従属性を考察すると，ただ1つの自然数 $n=$ (エ)$\boxed{}$ に対してのみ，AとBとは (オ)$\boxed{}$ であって，その他の n の値に対しては，AとBとは (カ)$\boxed{}$である．　（慶　大）

精講　裏，表の出方は 2^n 通り．

A：$n-1$ 個裏か n 個裏．$n+1$ 通り．

B：0個裏，n 個裏ということはない．2^n-2 通り．

$$\therefore\quad P(\mathrm{A})=\frac{n+1}{2^n},\quad P(\mathrm{B})=\frac{2^n-2}{2^n}$$

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ は $n-1$ 個裏ということであり，n 通り．

$$\therefore\quad P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{n}{2^n}$$

AとBが独立である条件は

$$\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2^n-2}{2^n}\quad(\because\quad P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}))$$

$$\therefore\quad 2^n=2(n+1)\qquad\therefore\quad 2^{n-1}=n+1$$

これが成立するのは $n=3$ のときに限る．

よって，$n=3$ のときのみ，AとBは独立であって，その他の n に対してはAとBは従属である．

解答　(ア) $\dfrac{n+1}{2^n}$　(イ) $\dfrac{2^n-2}{2^n}$　(ウ) $\dfrac{n}{2^n}$　(エ) 3　(オ) 独立　(カ) 従属

研究　1°　独立の定義をはっきりさせておこう（ここでいう独立とは事象の独立のことで，試行の独立については次節で扱かう）．事象A，Bに対して，Bの起こる確率がAの影響を受けない．

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B})$$

であるとき，BはAから独立であるという．そうでないときは**従属**という．
$P(\mathrm{A})>0$ のとき，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B}) \iff P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$
であることは，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$ より明らか．ここで，$P(\mathrm{A})>0$ という条件をつけたが，右の等式だけなら，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\leqq P(\mathrm{A})$ より $P(\mathrm{A})=0$ のときも意味をもつ．したがって，$P(\mathrm{A})=0$ のときも含めて，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$ が成り立つとき，BはAから独立といってよい．また $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$ も $P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})=P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A})$ も同じだから，BがAから独立ならAもBから独立である．まとめると

“$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$ のとき，AとBに互いに独立である”

2°　AとBが互いに独立，すなわち $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$ と次の3つはそれぞれ同値である．i）$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=P(\overline{\mathrm{A}})\cdot P(\mathrm{B})$

ii）$P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=P(\mathrm{A})\cdot P(\overline{\mathrm{B}})$　　iii）$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{A}})\cdot P(\overline{\mathrm{B}})$

▶演　習◀

【44】　1つのさいころを続けて2回振ったときに出る目をその順に m，n とし，4つの事象①～④を

①　$m<5$　②　$|m-n|<5$　③　積 mn が奇数　④　m，n の一方が1で他方が6　とする．

(1)　（i）　事象②の起こる確率は$\boxed{}$である．

（ii）　事象①が起こったときに，事象②の起こる確率は$\boxed{}$である．

(2)　次の$\boxed{}$に適する事象を上の①～④のうちから選べ．

（i）　事象$\boxed{}$と事象$\boxed{}$は互いに他の余事象である．

（ii）　事象④は事象$\boxed{}$とも事象$\boxed{}$とも互いに排反である．

（iii）　事象①は事象$\boxed{}$と互いに独立である．　　（共通1次・追試）

【45】　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=x$ $(x\neq 0)$，$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=x'$ $(x'\neq 0)$，$\dfrac{P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}=y$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　y を x，x' を用いて表せ．

(2)　$xx'=\dfrac{1}{3}$ のとき，y を最小にする x，x' の値と y の最小値を求めよ．

(3)　A，Bが互いに独立で，x，x' が(2)で求めた y を最小にする値をとるとき，$P(\mathrm{A})$，$P(\mathrm{B})$，$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ の値を求めよ．

（同志社大）

標問 48.　〈3つの事象の独立〉

3人の人がある試験を受けることになった．この人達が試験に合格する確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ である．このとき，

(1)　3人のうち，少なくとも1人が合格する確率は□である．

(2)　1人だけ合格する確率は□である．

(3)　3人のうち，少なくとも2人が合格する確率は□である．

(4)　2人だけが合格する確率は□である．　　（日本大）

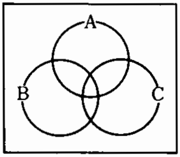
精講

A，B，C3人が合格することは互いに独立である．3つの事象A，B，Cが独立とは

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$,

$P(C\cap A)=P(C)\cdot P(A)$, $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

の4条件を満たすことをいう．



(1)　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)$
$+P(A\cap B\cap C)$

を計算してもよいが，余事象をとって

$$1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

(2)　ベン図から

$$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$$
$$=(1)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+2P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)+2\cdot\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$$

(3)　2人または3人が合格するということであるから　$(1)-(2)=\frac{7}{24}$

(4)　$(3)-P(A\cap B\cap C)=\frac{7}{24}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

解答　(1) $\frac{3}{4}$　(2) $\frac{11}{24}$　(3) $\frac{7}{24}$　(4) $\frac{1}{4}$

Ⅲ. 独　立　試　行

1° 試行の独立　くり返し行われる試行（反復試行）において，前の試行の結果が後の試行に何ら影響をおよぼさないとき，これらの試行は独立であるという．

2つの試行 T_1, T_2 が独立であるとき，T_1 の結果として起こる事象Aと T_2 の結果として起こる事象Bは独立（事象の独立）であって

$$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

が成り立つ．

2° 独立試行の定理　1回の試行で事象Aの起こる確率が p ならば，この試行を n 回くり返したときAが r 回起こる確率 P_r は

$$P_r={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r},\ \text{ただし}\ q=1-p\ \text{である．}$$

3° 最大確率　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}\geqq 1$（または $\leqq 1$）となる n を求めて $\{P_n\}$ の増減を調べる．

標問 49.　〈試行の独立〉

直線上に点 $\{\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ をとり，点0からコマを出発させて以下の規則に従ってコマを進めるものとする．さいころを投げその目が

(イ)　1または2のとき，コマを負の方向へ1だけ進める．

(ロ)　3または4のとき，コマは動かさない．

(ハ)　5または6のとき，コマを正の方向へ1だけ進める．

したがって，1回だけさいころを投げたときコマが -1, 0, 1 にくる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である．次の確率を求めよ．

(1)　2回さいころを投げたときコマが

(i) 2にくる確率　(ii) 1にくる確率　(iii) 0にくる確率

(2)　3回さいころを投げたときコマが

(i) 3にくる確率　(ii) 2にくる確率　(iii) 1にくる確率

(iv) 0にくる確率

(3)　4回さいころを投げたときコマが0にくる確率　（上智大）

解答 (1) (i) 2回の試行は独立．コマが2にくるのは 1+1 のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(ii) 1+0, 0+1 より $2\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ ……(答)

(iii) 1−1, −1+1, 0+0 より $(2+1)\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ……(答)

(2) (i) 1+1+1 より $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ ……(答)

(ii) 1+1+0 の順序を考えて $3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$ ……(答)

(iii) 1+1−1, 1+0+0 $(3+3)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$ ……(答)

(iv) 1−1+0, 0+0+0 $(3!+1)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$ ……(答)

(3) 1+1−1−1, 1−1+0+0, 0+0+0+0 の順序を考えて

$$\left(\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{19}{81} \qquad \cdots\cdots(答)$$

研究 2回目のさいころの投げ方は1回目のさいころの目の出方に“何ら影響を受けない”ので2回さいころを投げるという試行は独立であるが，“何ら影響を受けない”とはどういうことなのかを考えてみよう．

少し一般化して，試行 T_1, T_2 の根元事象全体をそれぞれ Ω_1, Ω_2 とする．

$$\Omega_1=\{A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_m\}$$
$$\Omega_2=\{B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots,\ B_n\}$$

このとき，2つの試行 T_1, T_2 による根元事象の組合せとして

$$(A_1,\ B_1),\ (A_1,\ B_2),\ \cdots\cdots,\ (A_1,\ B_n)$$
$$(A_2,\ B_1),\ (A_2,\ B_2),\ \cdots\cdots,\ (A_2,\ B_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(A_m,\ B_1),\ (A_m,\ B_2),\ \cdots\cdots,\ (A_m,\ B_n)$$

の mn 個が考えられる．この全体は Ω_1, Ω_2 の**直積集合**と呼ばれ，$\Omega_1\times\Omega_2$ と表される．

ひとことでいってしまえば，$\Omega_1\times\Omega_2$ の mn 個の要素の起こり方が同様

に確からしいと考えられるとき，2つの試行 T_1, T_2 は独立である，ということになる．さらに詳しく述べることにしよう．

試行 T_1, T_2 における事象A，B

$$A=\{A_{i_1},\ A_{i_2},\ \cdots\cdots\}\quad n(A)=a\quad (\text{Aの要素の個数})$$

$$B=\{B_{j_1},\ B_{j_2},\ \cdots\cdots\}\quad n(B)=b\quad (\text{Bの要素の個数})$$

の確率 p_1, p_2 は

$$p_1=\frac{n(A)}{n(\Omega_1)}=\frac{a}{m},\quad p_2=\frac{n(B)}{n(\Omega_2)}=\frac{b}{n}$$

であるから，AとBの直積事象 $A\times B$ の確率は

$$P(A\times B)=\frac{n(A\times B)}{n(\Omega_1\times\Omega_2)}=\frac{ab}{mn}=\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}=p_1p_2$$

となる．つまり，確率の定義からは本問(1)(i)などは $6\times 6=36$ 個の要素からなる直積集合を考え，その中で条件 $1+1$ となるのは 2×2 個あるから，求める確率は $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$ と計算するが，さいころを投げるという試行は1回目も2回目も何ら影響をおよぼさないから，これらの試行は独立であり $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ としてよいわけである．

試行の独立を“同様に確からしい”をもとに説明したが，もっと進んで“同様に確からしい”というアイマイな概念を排除した公理的確率論では

$$P(A\times B)=P(A)\cdot P(B)$$

が試行の独立の定義となる．(任意の事象A，Bについてこの関係が成り立つとき試行 T_1, T_2 は独立という．)

▶演　習◀

【46】 A，Bの2人が1つのさいころを交互に投げて，次の規則でゲームをする．

(イ) 出た目の数が異なるときは，大きい数を出した方の得点を $+1$ とし，小さい数を出した方の得点を -1 とする．

(ロ) 同じ目が出たときは，双方の得点を0とする．

このゲームを3回行ったとき，Aの合計得点が1点になる確率を求めよ．

(中央大)

標問 50.　〈独立試行の定理〉

立方体の2つの面に「1」，残りの4つの面に「6」を書いたさいころを5回投げるとき，

(1) 「1」の目が少なくとも3回出る確率 p は

$$p=\boxed{}$$

(2) 「1」の目が少なくとも3回続けて出る確率 q は

$$q=\boxed{}$$

である．　（東京薬大）

精講

(1) 「1」の目が出る回数を3回，4回，5回と分けて独立試行の定理を使えばよい．

$$p={}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$=\frac{51}{243}$$

(2) 「1」の目の続き方を右のように分けて

$$q=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{81}$$

1	1	1	□	□
6	1	1	1	□
□	6	1	1	1

解答　(1) $\frac{51}{243}$　(2) $\frac{7}{81}$

▶演　習◀

【47】 Aの袋には赤球5個と白球1個，Bの袋には赤球3個と白球2個が入っている．

(1) 甲はAから勝手に1球を取り出し，色を確認してもとにもどす．これを4回くり返して赤球の出た回数を a とする．乙はBから勝手に1球を取り出し，色を確認してもとにもどすという動作を同じく4回くり返して，赤球の出た回数を b とする．

(i) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}$　　(ii) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$

となる確率を，それぞれ求めよ．

(2) Bから勝手に1球を取り出してAに入れ，よくかき混ぜたあとAから1球を取り出すとき，それが白球である確率を求めよ．　（青山学院大）

標問 51. 〈乗法定理〉

ある硬貨を投げるとき，表と裏がおのおの確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るものとする．この硬貨を8回くり返して投げ，n 回目に表が出れば，$X_n=1$，裏が出れば $X_n=-1$ とし，

$$S_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n\quad(1\leqq n\leqq 8)$$

とおく．このとき，次の確率を求めよ．

(1)　$S_2\neq 0$ かつ $S_8=2$ となる確率

(2)　$S_4=0$ かつ $S_8=2$ となる確率　　(東　大)

精講　(1)　求める確率は

$$P(S_2\neq 0\ \text{かつ}\ S_8=2)=P(S_2\neq 0)\cdot P_{S_2\neq 0}(S_8=2)$$

であり，$S_2\neq 0$ となるのは $S_2=2$ または $S_2=-2$ のときであるから，2通りに分けて計算する．S_8 は S_2 の影響を受けるので注意が必要．

解答　(1)　$S_2\neq 0$ となるのはⅰ）2回とも表，ⅱ）2回とも裏　のとき

ⅰ）のとき，$X_1+X_2=2$ ゆえに，$S_8=2$ となるのは残り6回は表3回裏3回と出るときである．

ⅱ）のとき，$X_1+X_2=-2$　ゆえに，$S_8=2$　となるのは残り6回は表5回裏1回と出るときである．

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}&P(S_2\neq 0\ \text{かつ}\ S_8=2)\\&=P(X_1+X_2=2)\cdot P(X_3+X_4+\cdots\cdots+X_8=0)\\&\qquad+P(X_1+X_2=-2)\cdot P(X_3+X_4+\cdots\cdots+X_8=4)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{13}{128}\end{aligned}$$

……(答)

(2)

$$\begin{aligned}&P(S_4=0\ \text{かつ}\ S_8=2)\\&=P(X_1+\cdots\cdots+X_4=0)\cdot P(X_5+\cdots\cdots+X_8=2)\\&={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{32}\end{aligned}$$

……(答)

標問 52.　〈二項定理の利用〉

問題が n 題ある．それぞれの問題に m 個の解答が書いてあり，各問題について1つだけが正解であるとする．いま，n 題とも m 個の解答のうちからでたらめに1つを選んで答えたとき，$r(0 \leqq r \leqq n)$ 題正解になる確率 p_r を求めると，$p_r=$(ア)☐ である．また，奇数題正解となる確率を p_a，偶数題正解となる確率を p_e とすると

$$p_e-p_a=(1-\text{(イ)}\boxed{})^{\text{(ウ)}\boxed{}}$$

となる．特に，$n=100$，$m=3$ のとき p_a を求めると $p_a=$(エ)☐ である．ただし，0は偶数に含めるものとする．

（慶　大）

精講

1題について，正解となる確率 $p=\dfrac{1}{m}$，間違う確率 $q=\dfrac{m-1}{m}$

$$\therefore\quad p_r={}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{m}\right)^r\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-r}={}_n\mathrm{C}_r\frac{(m-1)^{n-r}}{m^n}$$

また，$p_e-p_a=(p_0+p_2+\cdots\cdots)-(p_1+p_3+\cdots\cdots)$

$$={}_n\mathrm{C}_0p^0q^n-{}_n\mathrm{C}_1p^1q^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}-\cdots\cdots$$

$$=(q-p)^n=\left(1-\frac{2}{m}\right)^n$$

特に，$n=100$，$m=3$ のとき

$$\begin{cases}p_e-p_a=\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{100}=\dfrac{1}{3^{100}}\\ p_e+p_a=1\end{cases}\qquad\therefore\quad p_a=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{100}}\right)$$

解答　(ア) ${}_n\mathrm{C}_r\dfrac{(m-1)^{n-r}}{m^n}$　(イ) $\dfrac{2}{m}$　(ウ) n　(エ) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{100}}\right)$

▶演　習◀

【48】 1回の試行で，事象Aの起こる確率を p とするとき，n 回の独立な試行で，Aの起こる回数が偶数となる確率は

$$\frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}$$

であることを証明せよ．

（福井医大）

標問 53.　〈P_n-P_{n+1}〉

A，B 2人がコインを1個ずつもち，同時に投げ合って一方が表で他方が裏なら表の出た方に○，裏の出た方に×，またともに表かともに裏ならどちらにも△を与えるものとする．そしてくり返し投げて，間に×をはさまずに○を2個先に取った方（△ははさんでもよい）を勝ちとする．

(1)　1回投げ合うとき，Aが○を取る確率は$\boxed{}$で，△を取る確率は$\boxed{}$である．

(2)　n回まで投げ合って，そのうち△のときがk回であり，しかもまだ勝負が決まらない確率は，$k=0$，1，2，……，$n-1$ の場合は　${}_n\mathrm{C}_k\times\boxed{}$　であり，$k=n$　の場合は$\boxed{}$である．したがってn回まで投げ合っても勝負が決まらない確率を計算すれば$\boxed{}$となる．

(3)　($n+1$) 回目でようやく勝負が決まる確率は$\boxed{}$である．

（立命館大）

精講

(1)　○を取る確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，△を取る確率は $1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

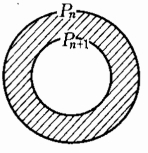
(2)　△はないのと同じであり，○，× が ○×○×…… あるいは ×○×○…… と $n-k$ 回続く状態を考えて，$0\leqq k\leqq n-1$ のときは

$${}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\times2={}_n\mathrm{C}_k2^{k-2n+1},\quad k=n \text{ のときは } \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

n回投げ合っても勝負が決まらない確率を P_n とすると

$$P_n=\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k2^{k-2n+1}+\frac{1}{2^n}\ \text{（二項定理を使って）}$$

$$=\frac{2}{2^{2n}}\{(2+1)^n-2^n\}+\frac{1}{2^n}=2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$



(3)　求める確率は　$P_n-P_{n+1}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

解答　(1) $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$　(2) 2^{k-2n+1}，$\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

標問 54.　〈最大確率〉

校庭に，南北の方向に1本の白線が引いてある．ある人が，白線上のA点から西へ 5 m の点に立ち，銅貨を投げて，表が出たときは東へ 1 m 進み，裏が出たときは北へ 1 m 進む．白線に達するまで，これを続ける．

(1)　A点から n m 北の点に到達する確率 p_n を求めよ．

(2)　p_n を最大にする n を求めよ．　（京　大）

精講　p_n の最大を求めるには

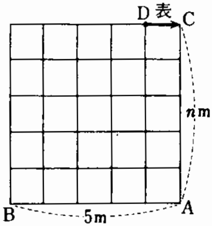
$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots,\ p_n,\ \cdots\cdots$$

の大小の変化を調べればよく（微分でいえば増減表にあたる），

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1\ \left(あるいは\ \frac{p_{n+1}}{p_n}<1\right)$$

となる n の範囲を求めるのが定石である．

解答　(1)　右図において，Aより nm 北の点Cに到達するには，$n+4$ 回目にDに到達しており，次に表を出したときである．



$$p_n={}_{n+4}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}\times\frac{1}{2}=\frac{{}_{n+4}C_4}{2^{n+5}}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{{}_{n+5}C_4}{{}_{n+4}C_4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+5}{n+1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n+1}$$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ となるのは $n+1<4$　　$\therefore\ n<3$

$$\therefore\ p_1<p_2<p_3=p_4,\ p_4>p_5>p_6>\cdots\cdots$$

よって，p_n が最大となる n は　3，4　　……(答)

▶演　習◀

【49】　大小2個のさいころを同時に投げる試行において，出る目の和が4である事象をAとする．いま，この試行を500回行うとき事象Aが起こる回数が n である確率を p_n とする．$p_n<p_{n+1}$ となる n の範囲を求めよ．

（茨城大）

標問 55. 〈有利な試合回数〉

4枚の硬貨を同時に投げる試行をn回行い，少なくとも1回はすべてが表になったとき甲の勝ち，それ以外は乙の勝ちとする．次の問いに答えよ．

(1) 乙が勝つのはどのような場合か，文章で答えよ．

(2) 甲が有利となる試行の回数を求めよ．ただし，

$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．　(信州大)

解答 (1) 乙が勝つのは

「n回とも少なくとも1枚は裏になる」ときである．　……(答)

(2) 1回の試行で，すべてが表となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ であるから，少なくとも1枚は裏である確率は $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ である．

乙が勝つ確率は $\left(\frac{15}{16}\right)^n$ であり，甲が有利となるのは

$$\left(\frac{15}{16}\right)^n<\frac{1}{2} \qquad \therefore\ n(\log_{10}15-\log_{10}16)<-\log_{10}2$$

$$\therefore\ n>\frac{-\log_{10}2}{1+\log_{10}3-5\log_{10}2}=\frac{0.3010}{1.5050-1.4771}=10.7\cdots\cdots$$

よって，甲が有利となる試行の回数は11回以上　……(答)

研究 乙が勝つのは甲が負けるときであり，(1)は甲が勝つときの否定命題を考えればよい．

甲が勝つ：「少なくとも1回はすべてが表である」

⇄「ある $k(1\leqq k\leqq n)$ に対してはすべての硬貨が表である」

これの否定命題は

「すべての $k(1\leqq k\leqq n)$ に対し，裏となる硬貨が存在する」

となる．否定命題のつくり方として

「ある……が存在する」と「すべての〜」

の対応関係はつかんでおこう．また，次のような文章で答えてもよい．

「n回とも“すべてが表”でない」とき，または，

「n回とも4枚が表になることはない」とき．

Ⅳ. 確率と漸化式

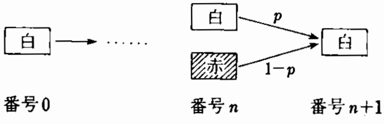
1° **確率と漸化式**　状況の変化を扱った確率の問題では漸化式の利用が有効である．それには状況に適した漸化式をどのようにたてるか，が出発点となる．そのポイントは一歩手前の状況の場合分けにあるが，このあたりは慣れが必要である．

2° **2項間・3項間・連立漸化式**　この3種類の漸化式が使われるが，確率との融合として出てくるのはどれも標準的なタイプばかりである．（この解き方については『基礎解析標準問題精講』参照）

標問 56. 〈2項間漸化式〉

直線上に，赤と白の旗をもった何人かの人が，番号 0, 1, 2, ……をつけて並んでいる．番号0の人は，赤と白の旗を等しい確率で無作為に上げるものとし，他の番号 j の人は，番号 $j-1$ の人の上げた旗の色を見て，確率 p で同じ色，確率 $1-p$ で異なる色の旗を上げるものとする．このとき，番号0の人と番号 n の人が同じ色の旗を上げる確率 P_n を求めよ。　（東　大）

精講　番号 n の人が番号0の人と同じ色の旗を上げるかどうかで場合分けして，番号 $n+1$ の人を考えてみよ．



解答　$P_{n+1}=P_n\cdot p+(1-P_n)(1-p)$

$=(2p-1)P_n+(1-p)$

特性方程式 $t=(2p-1)t+1-p$ の解を利用すると

$$P_{n+1}-\frac{1}{2}=(2p-1)\left(P_n-\frac{1}{2}\right)\quad\left(\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}\text{ は等比数列!!}\right)$$

$P_0=1$ より $P_n-\frac{1}{2}=\left(P_0-\frac{1}{2}\right)(2p-1)^n=\frac{1}{2}(2p-1)^n$

よって，$P_n=\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^n\}$　　……(答)

標問 57.　〈2項間漸化式〉

1から10までの数字を1つずつ書いた10枚のカードが小さい数字の順に並べてある．この中から任意に2枚のカードを抜き出し，その場所を入れかえるという操作を考える．この操作を n 回行ったとき，1枚目のカードの数字が1である確率を P_n とする．

(1)　P_1 を求めよ．

(2)　n 回目の操作のあと1が1枚目になく，$n+1$ 回目の操作のあとに1が1枚目にもどっている確率を P_n を用いて表せ．

(3)　P_{n+1} と P_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(4)　P_n を n の式で表せ．　（東京電機大）

精講　(2)は(3)で漸化式をつくるときのヒントとなっている．すなわち，n 回後に1が1枚目にあるかないかで場合分けし，$n+1$ 回後を考えるとよい．

解答　(1)　1回目の操作で1を抜き出さなかったときであり，

$$P_1=\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　n 回目の操作のあとに1が1枚目にないのは $1-P_n$ で，このとき $n+1$ 回目の操作で1が1枚目にもどるのは1枚目にあるカードと1のカードを引くときであり，

$$(1-P_n)\cdot\frac{1}{{}_{10}C_2}=(1-P_n)\cdot\frac{1}{45} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3)　n 回目の操作のあと1が1枚目にあるかないかで場合分けして，

$$P_{n+1}=P_n\cdot\frac{4}{5}+(1-P_n)\cdot\frac{1}{45}$$

$$=\frac{7}{9}P_n+\frac{1}{45} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4)　$t=\frac{7}{9}t+\frac{1}{45}$ の解より $P_{n+1}-\frac{1}{10}=\frac{7}{9}\left(P_n-\frac{1}{10}\right)$ と変形される．

$$\therefore\ P_n-\frac{1}{10}=\left(P_1-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1},\ P_n=\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

標問 58.　〈3項間漸化式〉

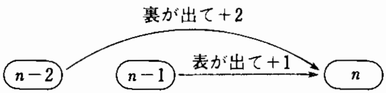
数直線上を原点から右（正の向き）に硬貨を投げて進む．表が出れば1進み，裏が出れば2進むものとする．このようにして，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す．ただし，n は自然数とする．

(1)　3以上の n について，p_n と p_{n-1}，p_{n-2} との関係式を求めよ．

(2)　$p_n (n \geqq 3)$ を求めよ．　　　　（京　大）

精講

1°　点 n に到達するのに，$n-1$ からと，$n-2$ から直接に n に進むのとの2通りが考えられる．



2°　**3項間漸化式**　$p_{n+2}+ap_{n+1}+bp_n=0$

特性方程式 $t^2+at+b=0$ の解 α，β を使って

$$\alpha \neq \beta \text{ なら } \begin{cases} p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n) \\ p_{n+2}-\beta p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\beta p_n) \end{cases}$$

$$\alpha=\beta \text{ なら } \quad p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\alpha p_n)$$

と変形する．

解答 (1)　　$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$　　……（答）

(2)　$t^2=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$ より $t=-\frac{1}{2}$，1　　(1)の漸化式は

$$p_n-p_{n-1}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-p_{n-2}),\quad p_n+\frac{1}{2}p_{n-1}=p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$$

と変形される．$p_1=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{3}{4}$ であるから

$$\begin{cases} p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=p_2+\frac{1}{2}p_1=1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_n=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{……（答）}$$

標問 59. 〈破産の確率・3項間漸化式〉

銅貨を投げ，表が出れば1円もらい，裏が出れば1円払うゲームがある．ただし，表の出る確率を α $(0<\alpha<1)$ とする．このようなゲームを所持金がなくなるか，目標額（c 円とする）が達成されるまで続ける．所持金が n 円のとき，所持金がなくなる確率を p_n で表す $(n=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ c)$．したがって，$p_0=1$，$p_c=0$ である．

(1) p_{n-1}，p_n，p_{n+1} $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ c-1)$ の間にはどんな関係が成立するか．

(2) p_n を n，c，α を用いて表せ．　（名古屋市大）

解答 (1) 所持金が n 円のとき，ゲームをすれば表または裏が出て右の図式となるから

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & n+1\text{円} \arrow[r, "p_{n+1}"] & 0\text{円} \\
n\text{円} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "1-\alpha"'] & & \\
 & n-1\text{円} \arrow[r, "p_{n-1}"] & 0\text{円}
\end{tikzcd}$$

$$p_n=\alpha p_{n+1}+(1-\alpha)p_{n-1} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\alpha t^2-t+(1-\alpha)=0$ の解を使って(1)の漸化式を変形すると

$$p_{n+1}-p_n=\frac{1-\alpha}{\alpha}(p_n-p_{n-1})=\cdots\cdots=(p_1-p_0)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n \quad \cdots\cdots①$$

$$p_{n+1}-\frac{1-\alpha}{\alpha}p_n=p_n-\frac{1-\alpha}{\alpha}p_{n-1}=\cdots\cdots=p_1-\frac{1-\alpha}{\alpha}p_0 \quad \cdots\cdots②$$

①－②を計算して

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-1\right)p_n=(p_1-p_0)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n-\left(p_1-\frac{1-\alpha}{\alpha}p_0\right) \quad \cdots\cdots③$$

$p_0=1$，$p_c=0$ より

$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき②より $p_n=1+n(p_1-1)$　$n=c$ として $p_1=\dfrac{c-1}{c}$

$\alpha\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のとき③で $n=c$ として $p_1=\dfrac{(1-\alpha)^c-\alpha^{c-1}(1-\alpha)}{(1-\alpha)^c-\alpha^c}$

$$\therefore\ p_n=\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2} \text{ のとき } 1-\dfrac{n}{c}\\[2mm] \alpha\fallingdotseq\dfrac{1}{2} \text{ のとき } \dfrac{\alpha^c}{\alpha^c-(1-\alpha)^c}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n-\dfrac{(1-\alpha)^c}{\alpha^c-(1-\alpha)^c}\end{cases}$$

$\cdots\cdots(\text{答})$

標問 60. 〈連立漸化式〉

各回において，赤球，白球，黒球のいずれか1個をそれぞれ $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$ の確率で選ぶ操作をくり返し行う．ただし，赤球が2回続けて選ばれた場合，または，白球が2回続けて選ばれた場合に限り，そこで，操作を止めるものとする．n 回目に赤球または白球が選ばれ，かつ，操作が続行される確率を p_n とし，n 回目に黒球が選ばれる確率を q_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　p_{n+1} と q_{n+1} とを p_n，q_n を用いて表せ．

(2)　q_{n+2} を q_{n+1}，q_n の式で表せ．

(3)　q_n を n の式で表せ．　　　　（横浜国大）

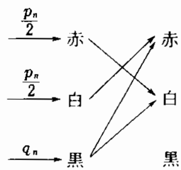
精講

赤球と白球は対等であり，n 回目に赤球または白球が選ばれて操作が続く確率は $\frac{p_n}{2}$ であるから，$n+1$ 回目に赤球または白球が選ばれ，さらに操作が続く確率は

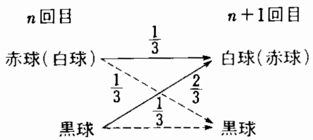
$$p_{n+1}=\frac{p_n}{2}\cdot\frac{1}{3}\times 2+q_n\cdot\frac{2}{3}$$

となる．q_{n+1} の方も同じように考えればよい．

また，赤球，白球をまとめて図式にすればもっとスッキリする．



解答　(1)　n 回目と $n+1$ 回目の操作を図式に表すと次のようになる．これより



$$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n \end{cases}$$ ……(答)

(2)　(1)の第2式より　$p_n=3q_{n+1}-q_n$

第1式に代入し

$$3q_{n+2}-q_{n+1}=\frac{1}{3}(3q_{n+1}-q_n)+\frac{2}{3}q_n$$

$$\therefore\quad q_{n+2}=\frac{2}{3}q_{n+1}+\frac{1}{9}q_n$$ ……(答)

(3) $t^2=\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}$ の2解を α, β とおく. $\left(\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{3},\ \beta=\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$

(2)の3項間漸化式は

$$q_{n+2}-\alpha q_{n+1}=\beta(q_{n+1}-\alpha q_n),$$
$$q_{n+2}-\beta q_{n+1}=\alpha(q_{n+1}-\beta q_n)$$

と変形される.

$q_1=\frac{1}{3}$, $q_2=\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}q_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ であるから

$$\begin{array}{rr} & q_{n+1}-\alpha q_n=(q_2-\alpha q_1)\beta^{n-1} \\ -) & \underline{q_{n+1}-\beta q_n=(q_2-\beta q_1)\alpha^{n-1}} \end{array}$$

$$(\beta-\alpha)q_n=\frac{1}{3}\{(1-\alpha)\beta^{n-1}-(1-\beta)\alpha^{n-1}\}$$

$$\therefore\quad q_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\beta^{n-1}-\frac{2-\sqrt{2}}{3}\alpha^{n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\} \qquad \cdots\cdots(答)$$

研究 (2)の誘導から「連立漸化式──→3項間漸化式」として q_n を求めたが, 連立漸化式を直接解いてみよう.

$$t=\frac{\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}=\frac{t+2}{t+1} \text{ より } t=\pm\sqrt{2} \text{ を使えば}$$

$$p_{n+1}-\sqrt{2}q_{n+1}=\frac{1-\sqrt{2}}{3}(p_n-\sqrt{2}q_n),$$
$$p_{n+1}+\sqrt{2}q_{n+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}(p_n+\sqrt{2}q_n)$$

と変形され, $p_1=\frac{2}{3}$, $q_1=\frac{1}{3}$ であるから

$$p_n-\sqrt{2}q_n=-\sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n,\quad p_n+\sqrt{2}q_n=\sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

これより, p_n, q_n は求められる.

また, (1)の式を $\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$ と行列で表し, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ $=A$とおけば $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p_{n-1}\\q_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}p_{n-2}\\q_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=A^{n-1}\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}$ となる.

Aの $n-1$ 乗を計算し, p_n, q_n を求めてもよい.

標問 61. 〈連立漸化式〉

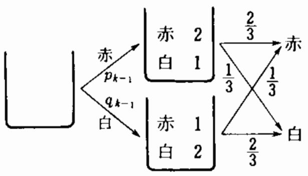
n 個 ($n \geqq 2$) の箱がある．第1の箱には a 個の赤球と b 個の白球が入っているとし，また，第2から第 n までの箱には，それぞれ赤球と白球が1個ずつ入っているとする．いま，第1の箱から1つの球を取り出してそれを第2の箱に入れ，次に第2の箱から1つの球を取り出して第3の箱に入れ，以下同様のことを次つぎに行うとする．そうして，最後に第 n の箱から取り出した球が赤球である確率を p_n，白球である確率を q_n とする．このとき，

(1) 行ベクトル $(p,\ q)$ と2次の正方行列 A とを適当に取ったとき，　$(p_n,\ q_n)=(p,\ q)A^{n-1}$

という形の式が成り立つことを示し，その $(p,\ q)$ と A をかけ．

(2) p_n を求めよ．　　（九　大）

解答 (1) 第 $k-1$ の箱と第 k の箱から赤球，白球が取り出される図式は左図のようになる．



第 $k-1$ の箱　　第 k の箱

$$p_k=\frac{2}{3}p_{k-1}+\frac{1}{3}q_{k-1}$$

$$q_k=\frac{1}{3}p_{k-1}+\frac{2}{3}q_{k-1}$$

$$\therefore\quad (p_k,\ q_k)=(p_{k-1},\ q_{k-1})\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

右辺の行列を A とおくと

$$(p_n,\ q_n)=(p_{k-1},\ q_{k-1})A=(p_1,\ q_1)A^{n-1}$$

よって，求めるベクトル $(p,\ q)$ と行列 A は

$$(p,\ q)=(p_1,\ q_1)=\left(\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a+b}\right),\quad A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1)の漸化式より

$$p_n-q_n=\frac{1}{3}(p_{n-1}-q_{n-1})=\cdots\cdots=(p_1-q_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n+q_n=1$$

両式を加えて整理すると

$$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+(p_1-q_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots\cdots(答)$$

研究

1° 設問の流れをみると A^{n-1} を求めて p_n を出させたいようだが，解答のように p_n-q_n，p_n+q_n を計算した方がはやい．これは

$$\begin{cases} p_{n+1}=ap_n+bq_n \\ q_{n+1}=bp_n+aq_n \end{cases}$$ 型の場合ならいつも使える．

参考のために A^{n-1} を求めてみると（☞ 代数・幾何標準問題精講）

$$A^{n-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}$$

2° n 回目の試行の確率が $n-1$ 回目の結果だけに影響を受けるような試行の連鎖をマルコフ連鎖という．本問にでてきた行列 A を推移確率行列という．

▶演　習◀

【50】 天気を晴，雨の2つの状態だけと考えることにすれば，ある地方では晴の翌日に晴となる確率と，雨の翌日に雨となる確率とが等しいという．この等しい値を s とすれば，この地方で

(1) 第1日目（$i=1$）が晴のとき，第3日目（$i=3$）も晴となる確率を求めよ．

(2) 第 i 日目（$i\geqq 2$）が晴となる確率を p_i，雨となる確率を q_i とかく．p_{i+1}，q_{i+1} を p_i，q_i，s で表せ．

(3) 第1日目が晴のとき，p_{i+1}，q_{i+1} を s と n で表せ．

ただし，その日の天気は前日の天気のみに影響を受けるものとし，$0<s<1$ とする．（同志社大）

標問 62.　〈連立漸化式〉

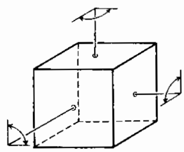
さいころが1の目を上面にして置いてある．向かい合った1組の面の中心を通る直線のまわりに90°回転する操作をくり返すことにより，さいころの置き方を変えていく．ただし，各回ごとに，回転軸および回転する向きの選び方は，それぞれ同様に確からしいとする．第n回目の操作のあとに1の目が上面にある確率を p_n，側面のどこかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする．

(1)　p_1，q_1，r_1 を求めよ．

(2)　p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} で表せ．

(3)　$p=\lim_{n\to\infty} p_n$，$q=\lim_{n\to\infty} q_n$，$r=\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．　（東　大）

解答　(1)　上面の回転軸を選んだとき1の目は動かず，他の回転軸のとき1の目は側面に移る．



$$p_1=\frac{1}{3},\quad q_1=\frac{2}{3},\quad r_1=0 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　n回目に1の目が上面にあるのは $n-1$ 回目に上面あるいは側面にある場合で，どの側面にあっても，1が上面にくる回転は1つ．

$$p_n=p_{n-1}\cdot\frac{1}{3}+q_{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+r_{n-1}\cdot 0$$

$$\therefore\quad p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

同様にして

$$q_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$r_n=\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)　$q_n=\frac{2}{3}(p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1})=\frac{2}{3}$ より(2)の漸化式を解くと

$$p_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},\quad r_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad p=\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{6},\quad q=\lim_{n\to\infty} q_n=\frac{2}{3},\quad r=\lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{6} \cdots\cdots(答)$$